UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

TEYLOR FORMULASINING AYRIM TATBIQLARI

Davlatboyev Temur Obod o‘g‘li
Nukus davlat pedagogika instituti Matematika o‘qitish metodikasi kafedrasi assistent o’qituvchisi, tdavlatboyev@mail.ru
Mambetturdiev Muxammedali Jumaǵaliy ulı
Nukus davlat pedagogika instituti Matematika o‘qitish metodikasi kafedrasi assistent o’qituvchisi, muxammedalimambetturdiev@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada Teylor formulasining nazariy asoslari hamda uning amaliy qo‘llanish yo‘nalishlari tahlil qilinadi. Xususan, Teylor yoyilmasining tenglamalarni yechishda qo‘llanilishi, murakkab funksiyalarni qator ko‘rinishida ifodalash orqali masalani soddalashtirish imkoniyatlari ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, integral hisoblash jarayonida funksiyani Teylor qatoriga yoyish usuli yordamida integrallarni hadma-had hisoblashning afzalliklari yoritiladi.

Kalit so‘zlar: Teylor formulasi, tenglamalarni taqribiy yechish, integralni qator yordamida hisoblash, differensial tenglamalar yechimi, qator ko‘rinishidagi yechim, funksiyaning taqribiy qiymati.

Аннотация. В настоящей статье анализируются теоретические основы формулы Тейлора и направления её практического применения. В частности, рассматривается использование разложения Тейлора для решения уравнений и возможности упрощения задач путём представления сложных функций в виде ряда. Также освещаются преимущества почленного интегрирования с помощью разложения функции в ряд Тейлора.

Ключевые слова: Формула Тейлора, приближённое решение уравнений, вычисление интеграла с помощью ряда, решение дифференциальных уравнений, решение в виде ряда, приближённое значение функции.

Annotation. This article analyzes the theoretical foundations of Taylor's formula and its areas of practical application. In particular, it examines the use of the Taylor expansion in solving equations and the potential for simplifying problems by representing complex functions as a series. Furthermore, the article highlights the advantages of calculating integrals term-by-term by expanding the function into a Taylor series during the process of integral calculus.

Keywords: Taylor's formula, approximate solution of equations, calculating integrals using series, solution of differential equations, solution in series form, approximate value of a function.

Kirish

Ingliz matematigi Teylor matematika faniga o‘zining juda ko‘p ilmiy ishlari bilan katta hissa qo‘shgan olimlardan biri bo‘lib, uning matematikaga qo‘shgan eng muhim yangiliklaridan biri 1715-yili yaratgan nazariyasi bilan matematika tarixida o‘chmas iz qoldirgan. Teylorning bu yangiligi shundan iboratki, unda berilgan $y = f(x)$ funksiyani shunday $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ ko‘rinishidagi funksiya bilan yaqinlashtirish kerak, natijada $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ bo‘lishi kerak va tenglik belgisining o‘ng tomonidagi qator hadlari sonini qanchalik ko‘p qilib olganda bu qatorning qiymati tenglik belgisining chap tomonidagi funksiyaga shunchalik yaqinlashishi kerak.

Adabiyotlar tahlili. Yuqoridagi tushunchalar Teylor formulasi va uning turli yo‘nalishlardagi tatbiqlari ko‘plab klassik va o‘quv-uslubiy adabiyotlarda atroflicha yoritilgan. Jumladan, [1] kitobda matematik analizning asosiy mavzulari qatorida Teylor formulasi, uning qoldiq hadi va amaliy masalalarda qo‘llanilishi ko‘plab misol va mashqlar orqali bayon etilgan. [2] Adabiyotda esa Teylor formulasi nazariy jihatdan asoslab berilib, differensiallanuvchi funksiyalarni qator ko‘rinishida ifodalash shartlari va isbotlari keltirilgan.

Tadqiqot metodologiyasi. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning ($x_0 \in \mathbb{R}$) biror atrofida berilgan bo‘lsin. Agar funksiyani x_0 nuqtaning shu atrofida $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lib, x_0 nuqtada n - tartibli $f^{(n)}(x_0)$hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \theta((x - x_0)^n)$$

bu formula Teylor formulasi deyiladi[1].

Teylor formulasining $F(x, y) = 0$ tenglamasini yechishda qo‘llanilishi. Aytaylik $F(x, y) = 0$ ko‘rinishidagi oshkormas funksiya berilgan bo‘lsin. Agar bu tenglamadan x yoki y o‘zgaruvchilarini topish mumkin bo‘lsa, unda masala yechilgan hisoblanadi, aks holda, ya’ni x yoki y o‘zgaruvchilariga nisbatan yechish mumkin bo‘lmasa, unda bu tenglamani yechish uchun Teylor formulasidan foydalanamiz. $x_0 = 0$ uchun

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

buni $F(x, y) = 0$ tenglamadagi o‘rniga qo‘yib

$$F(x, a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0$$

tenglamasiga ega bo‘lamiz. Endi noma’lum koeffitsientlar usulidan foydalanib a_0, a_1, a_2 koeffitsientlarini aniqlaymiz va $F(x, y) = 0$ tenglamasining dastlabki taqribiy yechimiga ega bo‘lamiz. Agar bu noma’lum koeffitsientlar sonini ko‘proq aniqlasak, unda qaralayotgan tenglamaning yechimi aniqroq topiladi.

Teylor formulasining $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ integralini hisoblashdagi qo‘llanilishi. Aytaylik bizga, $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ko‘rinishidagi integralni hisoblash talab etilsin. Agar $f(x)$ funksiyasining boshlang‘ich funksiyasi bizga ma’lum bo‘lsa, u holda masala yechilgan hisoblanadi. Ammo boshlang‘ich funksiya bizga ma’lum bo‘lmay, shu bilan birga bu funksiyani oddiy funksiyalar orqali ifodalash mumkin bo‘lmasa, u holda Teylor formulasidan foydalanamiz.

Teylor formulasining $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ differensial tenglamasini yechish jarayonidagi tatbiqlari. Aytalik, $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ differensial tenglama berilgan bo‘lsin. Bu tenglamaning xususiy yechimlarini topish uchun boshlang‘ich shartlar deb ataladigan $x = x_0$ nuqtadagi noma’lum funksiyaning va uning $(n-1)-$ tartibgacha hosilalarining qiymatlari, ya’ni

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

qiymatlari oldindan berilgan bo‘lishi kerak. Shu maqsadda yechimni $x = x_0$ nuqta atrofida

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

ko‘rinishida izlaymiz. Yechimning bu ko‘rinishidan ketma-ket n marta hosila olib, keyinchalik tenglamadagi o‘rinlariga qo‘ysak va boshlang‘ich shartlardan foydalanib, noma’lum koeffitsientlarni aniqlasak, unda biz tenglamani yechgan bo‘lamiz.

Teylor formulasining funksiya qiymatini taqribiy hisoblash jarayonida qo‘llanilishi. Aytaylik $y = f(x)$ funksiyasi berilgan bo‘lsin. Agar o‘zining aniqlanish sohasidagi biror $x = x_0$ nuqtadagi shu funksiyaning qiymatini hisoblash talab etilsa, unda bu masalani yechishda Teylor formulasi funksiyaning $f(x_0)$ qiymatini taxminiy hisoblashga imkoniyat beradi. Buni quyidagi misollarda ko‘rib chiqish mumkin.

Olingan natijalar va muhokama.

1-Misol.

$$xy - e^x + e^y = 0$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Tenglamadagi noma’lum y ni

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

ko‘rinishida izlaymiz va uni berilgan tenglamadagi o‘rinlariga qo‘yamiz. Tenglamaga qo‘ymasdan oldin $y = 0$ni tenglamaga qo‘yib ko‘ramiz, shunda $0 - e^x + 1 = 0$ bo‘lib, undan $x = 0$ kelib chiqadi, demak berilgan tenglamaning bir yechimi $(0,0)$ nuqtasi bo‘lar ekan, unda $a_0 = 0$ bo‘lib, endi qolgan yechimlarni topish uchun berilgan tenglamaga $y = a_1x + a_2x^2 + \dots$ ni qo‘yish yetarli bo‘ladi. Endi $y = a_1x + a_2x^2 + \dots$ ni tenglamaga qo‘ymasdan oldin, tenglamadagi e^x ni

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots$$

ko‘rinishda Makleron qatoriga yoyib olamiz. Shunda

$$x(a_1x + a_2x^2 + \ldots) - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots\right) + 1 + \left(1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \ldots\right) + \\ + \frac{1}{2!}\left(1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \ldots\right)^2 + \ldots = 0$$

yoki

$$(-1 + a_1)x + \left(a_1 - \frac{1}{2!}a_1^2\right)x^2 + \left(a_2 - \frac{1}{3!}a_2 + a_1a_2 + \frac{1}{3!}a_1^3\right)x^3 + \ldots = 0$$

bo‘ladi. O‘z navbatida bundan noma’lum koeffitsientlarga nisbatan

$$\begin{cases} -1 + a_1 = 0, \\ a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_1^2 = 0, \\ a_2 - \frac{1}{6}a_3 + a_1a_2 + \frac{1}{6}a_1^3 = 0, \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \end{cases}$$

sistemasiga ega bo‘lamiz. Bu sistemadan $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, \ldots$ bo‘lib, natijada $y = x - x^2 + 2x^3 + \ldots$ ko‘rinishida aniqlanadi.

2-Misol. Nazariy fizikaning ayrim bo‘limlarini o‘rganish vaqtida uchraydigan va integral sinus deb ataladigan

$$\int \frac{\sin x}{x}dx$$

integralni hisoblang.

Yechilishi. Bizga ma’lumki

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$$

bo‘lgani uchun

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots$$

bo‘lib, buni integral ostidagi o‘rniga qo‘ysak

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \ldots\right)dx = c + x - \frac{1}{3 \cdot 3!}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!}x^5 - \ldots$$

bo‘ladi.

3-Misol. $y'' - xy = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$ Koshi masalasini yeching.

Yechilishi. Bu holda $x_0 = 0$ ekanligini hisobga olib, yechimni

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

ko‘rinishida izlaymiz. Buni boshlang‘ich $y(0) = 0, y'(0) = 1$ shartlariga qo‘ysak

$$y(0) = a_0 = 0, y'(0) = a_1 = 1$$

bo‘lib,

$$y(x) = x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Endi bundagi qolgan koeffitsientlarni aniqlash uchun, yechimning so‘nggi ko‘rinishidan ketma-ket ikki marta hosila olib

$$y'(x) = 1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$$
$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

keyinchalik bularni berilgan tenglamadagi o‘rinlariga qo‘yamiz:

$$2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots = x(x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots)$$

yoki

$$2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots = x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots$$

Endi so‘nggi tenglikning ikki tomonidagi bir xil darajalar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib chiqamiz:

$$a_2 = 0, a_3 = 0, \ldots, n(n-1)a_n = a_{n-3}.$$

Xulosa qilib aytganda $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$ bo‘lib, qolgan noma’lum koeffitsiyentlar

$$a_n = \frac{a_{n-3}}{n(n-1)}$$

tengligidan aniqlanadi:

$$a_4 = \frac{a_1}{12} = \frac{1}{12}, a_5 = 0, a_6 = 0, a_7 = \frac{1}{12 \cdot 42}, \ldots$$

va yana boshqa. Bu topilganlarni yechimning

$$y(x) = x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

ko‘rinishidagi o‘rinlariga qo‘ysak, unda yechim

$$y(x) = x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{12 \cdot 42}x^7 + \ldots$$

shakliga ega bo‘ladi.

4-Misol. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasining $x = 1{,}004$ dagi qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblang.

Yechilishi. Berilgan funksiyaning $x = 1{,}004$ dagi qiymatini

$$\sqrt{1{,}004} = \sqrt{1 + 0{,}004} = (1 + 0{,}004)^{\frac{1}{2}}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Unda yuqoridagi

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n, R_n(x) = 0.$$

formulasiga asoslansak, $m = \frac{1}{2}, x = 0{,}004$ ekanligidan foydalanib

$$\sqrt{1{,}004} = \sqrt{1 + 0{,}004} = (1 + 0{,}004)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \frac{0{,}004}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}(0{,}004)^2 + \ldots = 1 + 0{,}002 - \frac{(0{,}004)^2}{8} + \ldots$$

bo‘ladi.

Masalaning sharti bo‘yicha buning aniqligi 0,001 aniqlikda bo‘lishi uchun $\sqrt{1{,}004} = 1{,}002$bo‘ladi.

Xulosa

Mazkur maqolada Teylor formulasining turli yo‘nalishlardagi tatbiqlari tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, Teylor yoyilmasi tenglamalarni yechishda, murakkab funksiyalarni taqribiy hisoblashda, integrallarni soddalashtirishda va differensial tenglamalarning qator ko‘rinishidagi yechimlarini topishda samarali vosita hisoblanadi. Maqola davomida ko‘rib chiqilgan tadbiqlar Teylor formulasining matematik analiz, sonli usullar va ilmiy-texnik hisoblashlar sohasidagi ahamiyatini yana bir bor ta’kidladi

Foydalanilgan adabiyotlar

1. А. Саъдуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Ворисов, Р. Гуломов, Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, © ЎЗБЕКИСТОН нашриёти, 1993.
2. Азларов Т. А., Мансуров Х. Математический анализ, часть 1, - Т., «Ўқитувчи», 1986.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Наука, 1977 и издания других лет.
4.https://cyberleninka.ru/article/n/teylor-formulasi-va-uning-turli-matematik-masalalarga-qo-llanilishi/viewer