UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

ТЕОРЕМА ТИПА Н.Н. ЛУЗИНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А.Даужанов[1], П.Атабаева[2]

[1]доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета имени Бердаха, г. Нукус

[2]магистрант второго курса направление «Математический анализ», Каракалпакского государственного университета им. Бердаха, г. Нукус

Аннотация. В работе рассматриваются результаты, связанные с теоремами типа Лузина, играющими важную роль в теории интеграла Лебега, теории функций и функциональном анализе. Исследуются различные обобщения классической теоремы Лузина и их применение к функциям из пространств Соболева. Рассматриваются результаты, полученные рядом авторов, включая исследования Х. Уитни, А. Кальдерона, А. Зигмунда, Т. Бэгби, В. Циммера и Ф. Лю, посвящённые улучшенным вариантам аппроксимационных теорем и условиям существования гладких аппроксимаций. Также анализируются версии теорем типа Лузина, сформулированные в терминах ёмкости. Показано, что данные результаты находят широкое применение в современной математике, в частности в теории функций, теории вероятностей и теории оптимального управления.

Ключевые слова: Теорема Лузина, интеграл Лебега, измеримая функция, почти непрерывность, аппроксимация функций, пространства Соболева, емкость Бесселя, теорема Кальдерона–Зигмунда, функциональный анализ, теория функций.

Abstract. The work examines the results related to Lusin-type theorems, which play an important role in Lebesgue integral theory, function theory, and functional analysis. Various generalizations of the classical Lusin theorem and their applications to functions from Sobolev spaces are investigated. The results obtained by a number of authors, including H. Whitney, A. Calderon, A. Sigmund, T. Bagby, W. Zimmer, and F. Liu, devoted to improved versions of approximation theorems and the conditions for the existence of smooth approximations, are considered. Lusin-type theorem versions formulated in terms of capacitance are also analyzed. It has been shown that these results find wide application in modern mathematics, in particular, in function theory, probability theory, and optimal control theory.

Keywords: Luzin's theorem, Lebesgue integral, measurable function, nearly continuity, function approximation, Sobolev spaces, Bessel capacitance, Calderon-Zigmund's theorem, functional analysis, function theory.

Annotatsiya. Ilmiy ishimizda Lebeg integrali nazariyasi, funksiyalar nazariyasi va funksional analizda muhim rol o‘ynaydigan Lujin tipidagi teoremalar bilan bog‘liq natijalar ko‘rib chiqilgan. Klassik Luzin teoremasining turli umumlashmalari va ularning Sobolev fazosidagi funksiyalarga tatbiqlari o‘rganilmoqda. X. Uitni, A. Kalderon, A. Zigmund, T. Begbi, V. Simmer va F. Lyu kabi bir qator mualliflarning approksimatsiya teoremalarining takomillashtirilgan variantlari va silliq approksimatsiyalarning mavjudlik shartlariga bag‘ishlangan tadqiqotlari ko‘rib chiqilgan. Shuningdek, sig‘im terminlarida ifodalangan Lujin tipidagi teoremalarning versiyalari tahlil qilingan. Ushbu natijalar zamonaviy matematikada, xususan, funksiyalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va optimal boshqaruv nazariyasida keng qo‘llanilishi ko‘rsatilgan.

Tayanch so‘zlar: Lyuzin teoremasi, Lebeg integrali, o‘lchovli funksiya, deyarli uzluksizlik, funksiyalar approksimatsiyasi, Sobolev fazolari, Bessel sig‘imi, Kalderon-Zigmund teoremasi, funksional analiz, funksiyalar nazariyasi.

Актуальность. Классическое произведение Н.Н. Лузина (1883-1950). в теореме измеримый функций $C-$свойство как указано в теореме о непрерывно функция брать для измерено функция размерный был такого размера, какого он хотел. заменить на множественное число будет. Точнее . сделать когда вы говорите ,$[a,b]$ *в двух словах в розыске размерная (по Лебегу)* f *функция также* $\varepsilon>0$ *для числа так непрерывно* $f_\varepsilon \in C([a,b])$ *функция и закрыто* $U_\varepsilon \subset [a,b]$ *множество нашли, они для* $x \in U_\varepsilon$ *и* $m([a,b]\setminus U_\varepsilon)<\varepsilon$ *когда* $f(x)=f_\varepsilon(x)$ *(0.1) мест является мерой Лебега* m. *Напротив, показано, что этот свойство функция размерность гигант приближается.*

Это измерено функций $C-$свойство Теорема была доказана Лузином в 1912 году. со мной опубликованы («Матем. сборник», «Док. Французской А. Н.»). Сейчас Теорема Лузина каждый день функции теория в розыске важный из курсов (размеры) и интегралы теория, теория реального анализа ни за что курс функционального анализа) Данная теорема систематически включена в число важнейших результатов теории интегралов Лебега, нового направления в математическом анализе, возникшего в начале XX века.

Теория интеграла Лебега находит широкое применение во многих областях современной математики, а теорема Лузина (а также теорема Д.Ф. Егорова) основана на конкретных результатах, которые очень часто используются в интегральной теории. Действительно, можно с уверенностью обратиться к доказательствам теорем в современных научных статьях по теории функций, теории вероятностей и теории оптимального управления.

Некоторые авторы принимают описание измеримости (почти непрерывности) Лузина в качестве определения измеримой функции в топологическом пространстве (Д. Берк, Д. Фремлин).

Существуют также варианты теоремы Лузина, сформулированные для емкости (В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, В. Зимер). В общем, идея определения больших многочленов, обладающих различными хорошими свойствами, не удовлетворяемыми функциями во всем пространстве гетероскедастического функционального класса, в настоящее время используется во многих случаях, например, в теории пространств Соболева, где функции, принадлежащие классу Соболева , не превосходят непрерывно дифференцируемые третьи функции в больших многочленах (В.В. Степанов, С.Сакс, Х.Уитни, Г.Федерер). Математические Такие многогранные утверждения в математике называются «теоремами типа Лузина».

Если f функция принадлежит некоторому функциональному пространству, то 1) какими дополнительными свойствами гладкой непрерывности может f_ε обладать аппроксимирующая функция?

2) f_ε Возникают вопросы о том, разумно ли предполагать, что функция близка к другой функции. f

В частном случае, когда непрерывность (регулярность) функции высока, что можно сказать о кратном Лузина?

Эти вопросы интересовали многих известных математиков. Среди них стоит упомянуть следующих: А. Кальдерон, А. Зигмунд, В. Циммер, Х. Федерер, Х. Уитни, Ф. Лю, Дж. Майкл, Т. Багби, Б. Боярский, П. Хайлаш, П. Стржелецкий. В единственном случае первый результат такого типа, если он f дифференцируем почти всюду, то (0.1) заменяет G. Это можно увидеть в работе Федерера (1944) $f_\varepsilon \in C^1(R^n)$.

Х.Уитни (1951) f показал, что к такому выводу можно прийти, если приближенные сингулярные производные присутствуют почти всюду. Точнее, Х.Уитни установил этот факт.

UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

Теорема. *Пусть* $A \subset R^n$ *– существует многомерное множество. Если* A *многомерное освещение в этом множестве* $f : A \to R^n$ *аппроксимируется...* $apD_i f$ *– Если число производных сингулярно, то* $\varepsilon > 0$ *такое выражение можно найти для оставшегося числа* $f_\varepsilon \in C^1(R^n, R^m),\ x \in A$ *и*

$$f(x) = f_\varepsilon(x)$$ *(0.2) является допустимым, где —* m *мера Лебега .*

С точки зрения А. Кальдерона, А. Зигмунда, В. Циммера, Ф. Лю, Дж. Майкла, Т. Багби и др., возможно получение улучшенных результатов для функций, полученных из класса Соболева. Предположим, что $W_p^1(R^n), 1 \le p < \infty$ – класс Соболева $f \in L_p(R^n)$ состоит из функций, интегрированные производные которых $D_i f$ конечны для всех гладких непрерывных функций. $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ Для функций справедливо следующее интегральное тождество:

$$\int_{R^n} f(x) D_i \varphi(x) dx = -\int_{R^n} D_i f(x) \varphi(x) dx.$$

Кальдерон А. и Згмунд А. (1961) рассмотрели неупорядоченные классы Соболева и доказали, что если $f \in W_p^{(l)}(R^n)$ удалить de, то (0.1) $f_\varepsilon \in C^l(R^n)$ можно получить в равенстве.

В 1974 году Бэгби Т. и Циммер В. $cap(R^n \setminus G)$ доказали кратность в своей знаменитой работе и представили первую усиленную версию теоремы Кальдерона-Зигмунда с емкостью. Известный математик Ф. Лю (1977) проанализировал результат теоремы Кальдерона-Зигмунда и обнаружил, что в их теореме, помимо равенства (0.1)

$\|f - f_\varepsilon\|_{W_p^{(l)}(R^n)} < \varepsilon$ (0.3) — это доказательство, которое можно доказать.

В работах Дж. Майкла и В. Циммера (1985), Багби-Циммера и Ф. представлена объединенная версия теорем Лю.

Некоторые результаты исследований Д. Свансона (2002) $\alpha > 0$ и Б. Боярского, П. Хайлаша, П. Стржелецкого (2002) $\alpha \in N$ также были использованы в качестве примера для расчета емкости Бесселя , приведенного ниже .

Теорема. Пусть $f \in U_\alpha(L_p(R^n))$. $p > 1, l \in N, 0 \le l \le \alpha - 1, 0 \le \beta < 1$ Тогда. да $\forall \varepsilon > 0$ для $f_\varepsilon \in C^{l,\beta}(R^n)$ такой функции также важно $G \subset R^n$ Пена найдена, и для них

1) $cap_{\alpha - l - \beta, p}(G) < \varepsilon,$

2) все j $(|j| \le l)$ - мульти индексы для $x \in R^n \setminus G$ быть там $D^j f(x) = D^j f_\varepsilon(x)$,

3) $\|f - f_\varepsilon\|_{W_p^{(l-1)}(R^n)} < \varepsilon$,

здесь U_α – Потенциал Бесселя.

Вот. $\alpha = k$ - Путин Будь там! $U_k(L_p(R^n))$ классы и обычный $W_p^{(k)}(R^n)$ Классы Соболева со мной (например, И.Стейн) Единственное число интегралы да функции дифференциально монография «Сингуляр».

Рекомендуется сидя этот степень магистра аргумент доброта на работе уважать. В результате

получается тип Лузина. теоремы емкость к объектам недвижимости является связанной теоремой найдено.

Теорема. *Если* $G \subset R^n$ *функция* $f(x)$ *измерима, то существует множество* $\varepsilon > 0$ *такое, что для* $U_\varepsilon \subset G$ *любого заданного множества она имеет меру Лебега* $m(U_\varepsilon) < \varepsilon$, *и* $f|_{G \setminus U_\varepsilon}$ *след (сжатие) функции* $G \setminus U_\varepsilon$ *непрерывен на этом множестве.*

Для субгармонических функций множество, которое необходимо отбросить, также более компактно: как доказал Картан, $u(x)$ можно отбросить множество достаточной емкости, чтобы функция оставалась непрерывной . $cap(U_\varepsilon) < \varepsilon$

Теорема (Картан**).** *Любая* $u(x)$ *субгармоническая функция непрерывна в пространстве: для положительного числа* $\forall \varepsilon > 0$ *осуществует множество* $u(x)$ *такой емкости (размерности), что* $U_\varepsilon \subset G, cap(U_\varepsilon) < \varepsilon$ *функция* $G \setminus U_\varepsilon$ *непрерывна в этом множестве.*

Теоремы типа Лузина-Картана для субгармонических функций были за несколько минут изучены А. Садуллаевым, Е. Бедфордом, Б. Тейлором, Р. Мадрахимовым, С. Имомкуловым и другими. Например, А. Садуллаев и Р. Мадрахимов доказали непрерывную дифференцируемость субгармонических функций на основе исключения многочленов размерности 1. В этом случае для оценки объема удаляемых масс используется пакет Хаусдорфа $H_\alpha -$, размерность которого $\overset{/\backslash}{H}_\alpha -$ близка к размеру пакета Хаусдорфа.

Заключение.

В данной работе были рассмотрены основные результаты, связанные с теоремами типа Лузина и их обобщениями. Показано, что идея аппроксимации функций более регулярными функциями на множествах большой меры является фундаментальным инструментом современной математической теории. Исследования различных авторов позволили значительно расширить класс функций, для которых выполняются утверждения типа теоремы Лузина.

Особое внимание было уделено результатам, связанным с пространствами Соболева, где функции могут быть аппроксимированы более гладкими функциями на множествах большой меры. Работы Кальдерона и Зигмунда, а также последующие исследования Бэгби, Циммера и Лю позволили получить более сильные формы этих утверждений, включая версии, сформулированные в терминах емкости.

Полученные результаты играют важную роль в развитии современной теории функций, теории меры и интеграла, а также находят применение в смежных областях математического анализа. Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с изучением новых вариантов теорем типа Лузина для различных функциональных пространств и их приложений.

Литература:

1. Nikolai Nikolaevich Luzin. Surles propriétés des fonctions mesurables. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences,* 1912.
2. Лузина-Егорова теорема С.13, Гл.4, функции Соболева С.120, Гл.5, Функции с ограниченной вариацией С.166, Гл.6, теорема2 С.252.
3. Hassler Whitney. On totally differentiable and smooth functions. *Pacific Journal of Mathematics,* 1951.
4. Alberto Calderón, Antoni Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Studia Mathematica,* 1961.
5. Jan Malý, William P. Ziemer. Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations. 1985.