UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

MARKAZIY LIMIT TEOREMASINING MATEMATIK STATISTIKADA QO‘LLANISHI

Qarshi davlat texnika universiteti, Oliy matematika kafedrasi assistenti,
***Bekmuradov Bobur Toyloq o‘g‘li**, b.bekmuradov@alumni.nsu.ru*
Qarshi davlat texnika universiteti, Oliy matematika kafedrasi dotsenti,
***Xalil Abdurasulov** xalilabdurasulov41@gmail.com*
Qarshi davlat texnika universiteti, Oliy matematika kafedrasi, katta o‘qituvchisi
***Tufliyev Egamberdi Olimovich** egamberditufliyev282@gmail.com*

Annotatsiya. Maqolada ehtimollar nazariyasining markaziy limit teoremasi (MLT)ning matematik statistika masalalarida, ayniqsa taqsimot parametrlarini baholash jarayonida qo‘llanishi yoritiladi. Avvalo tanlanma statistik taqsimoti va uning asosiy sonli xarakteristikalari (tanlanma o‘rtacha qiymat, tanlanma dispersiya, o‘rtacha kvadratik chetlanish, moda, mediana hamda variatsiya koeffitsienti) ta’riflanadi va hisoblash formulalari keltiriladi. Keyingi qismda taqsimot parametrlarining statistik baholari tushunchasi ochib berilib, siljimagan (unbiased), asosli (consistent) va effektiv (efficient) baholar haqida ta’rif va xulosalar bayon qilinadi. Normal taqsimot parametrlarini intervalli baholash uchun ishonchli interval qurish usullari ko‘rsatiladi: dispersiya ma’lum bo‘lganda matematik kutilish uchun normal taqsimotga tayangan interval, dispersiya noma’lum bo‘lganda esa Student taqsimoti asosidagi interval, shuningdek dispersiya (yoki o‘rtacha kvadratik chetlanish) uchun χ^2-taqsimotdan foydalanilgan ishonchli intervallar keltiriladi. Nazariy natijalar qishloq xo‘jaligi (hosildorlikni chamalash) va ishlab chiqarish/texnik nazorat (lampalar, detallar, o‘lchash xatolari) misollarida amaliy masalalar orqali mustahkamlanadi.

Kalit so‘zlar: markaziy limit teoremasi; matematik statistika; tanlanma o‘rtacha; tanlanma dispersiya; ishonchli interval; normal taqsimot; Student taqsimoti; χ^2-taqsimot; parametrlarni baholash; Laplas funksiyasi.

Аннотация. В статье рассматривается применение центральной предельной теоремы (ЦПТ) теории вероятностей в задачах математической статистики, прежде всего при оценивании параметров распределения. Сначала вводятся выборочное статистическое распределение и основные числовые характеристики выборки (выборочное среднее, выборочная дисперсия, среднеквадратическое отклонение, мода, медиана и коэффициент вариации), приводятся формулы их вычисления. Далее раскрывается понятие статистических оценок параметров, даются определения несмещённости, состоятельности и эффективности оценок, а также приводятся соответствующие теоретические утверждения. Для нормального распределения показаны методы построения доверительных интервалов: для математического ожидания при известной дисперсии — на основе нормального закона, при неизвестной дисперсии — с использованием распределения Стьюдента; для дисперсии (или среднеквадратического отклонения) — на основе χ^2-распределения. Теоретические результаты иллюстрируются прикладными задачами из сельского хозяйства (оценка урожайности) и производственно-технического контроля (ресурс ламп, размеры деталей, ошибки измерений), что демонстрирует практическую значимость ЦПТ и интервального оценивания в анализе статистических данных.

Ключевые слова: центральная предельная теорема; математическая статистика; выборочное среднее; выборочная дисперсия; доверительный интервал; нормальное распределение; распределение Стьюдента; χ^2-распределение; оценивание параметров; функция Лапласа.

Abstract. The paper discusses how the Central Limit Theorem (CLT) from probability theory is used in mathematical statistics, with an emphasis on estimating distribution parameters. It first

introduces the sample statistical distribution and the main numerical sample characteristics (sample mean, sample variance, standard deviation, mode, median, and coefficient of variation) and provides the corresponding computational formulas. The next part clarifies the concept of statistical estimators for unknown parameters and outlines key quality requirements such as unbiasedness, consistency, and efficiency, supported by standard theoretical statements. For the normal distribution, the paper presents confidence-interval construction procedures: (i) a normal-based interval for the mean when the standard deviation is known; (ii) a Student's t–based interval for the mean when the standard deviation is unknown; and (iii) chi-square–based confidence intervals for the variance (or the standard deviation). The theoretical results are reinforced through worked examples and applied problems drawn from agriculture (yield assessment) and industrial/technical quality control (lamp lifetime, dimensional inspection of parts, and measurement errors). Overall, the material demonstrates how CLT-based approximations and interval estimation provide practical tools for analyzing real-world sample data and quantifying estimation accuracy at a specified confidence level.

Keywords: Central Limit Theorem; mathematical statistics; sample mean; sample variance; confidence interval; normal distribution; Student's t distribution; chi-square distribution; parameter estimation; Laplace function.

Statistik tasimotning tanlanma xarakteristikalari.

Ko'pincha amaliyotda tanlanma ma'lumotlarga asoslanib bosh to'lam belgisining muhim xarakteristikalarini bilish (hisoblash) zaruriyati tug'uladi. Masala, qishloq xo'jaligi sohasidagi ishchilarining o'rtacha oylik maoshi yoki o'rtacha yillik daromadi, ekinlardan (paxta, bug'doy, sholi va boshqalar) joriy yilda yilda olinadigan o'rtacha hosil, taqsimotning sonli xarakteristikalaridan foydalaniladi.

Aytaylik Bosh to'plamning X son belgisiga ko'ra hajmi n ga teng bo'lgan tanlanma to'plam olingan bo'lsin va tanlanma to'pamning statistik taqsimotini tuzamiz:

x_i	x_1	x_2	x_3	….	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	….	n_k

bu yerda $n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$.

Statistik taqsimotning sonli xarakteristikalari bo'lib, tanlanma o'rtacha qiymat, tanlanma dispersiya, tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish, moda, median ava variatsiya koeffistieyntlari xizmat qiladi.

Ta'rif 1. Tanlanma o'rtacha qiymat deb, tanlanma to'plam belgisining arifmetik o'rtacha qiymatiga aytiladi va uni $\bar{x}_T$ bilan belgilanadi.

Agar n hajmli tanlanma belgisining barcha qiymatlari $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ turlicha bo'lsa u holda

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+...+x_n) \qquad (1)$$

Agar belgining $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, n_3, ..., n_n$ chastotalarga ega va $n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$ bo'lsa, u holda tanlanma o'rtacha qiymati quyidagiga teng.

$$\bar{x}_t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k n_k = \frac{1}{n}(n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+...+n_kx_n) \quad (2)$$

Eslatma. Tanlanma o'rtacha qiymat tanlanmadan tanlanmaga o'tilganda o'zgarib boradi, shuning uchun tasodifiy moqdor deb qarash mumkin. Bu esa $\bar{x}_T$ ning taqsimot funksiyasi, bu sonli taqsimotning xarakteristikalari. Masalan, matematik kutilishi va dispersiyasi haqida so'z yuritish mumkinligini ko'rsatadi.

Agar taqsimotning intervali variatsion qatori berilgan bo'lsa, u holda tanlanma o'rtacha qiymatni hisoblashda x_k sifatida k −intervalning o'rtachasi olinadi.

Tanlanma o'rtacha qiymat statistik taqsimot haqida to'liq ma'lumot bermaydi. Ko'pincha amaliyotda kuzatiladigan qiymatning $\bar{x}_T$ atrofida qanday joylashganini bilish kerak bo'ladi. Masalan,

korxonadagi ishchilarning yillik daromadi, ishchilarning o‘rtacha yillik daromadidan qanchaga farqlanishi amaliy ahamiyatga ega.

x_k kuzatiladigan qiymatlarning $\overline{x_t}$ o‘rtacha qiymati atrofida sochilishini xarakterlash maqsadida tanlanma dipersiya kiritiladi.

Tanlanma dispersiya deb, X belgining kuzatiladigan qiymatlarini ularning X_T o‘rtacha qiymatidan chetlanishi kvadratlarining o‘rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi va uni D_T bilan belgilanadi.

Agar n hajmli tanlanma belgisining barcha $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ chastotalarga ega bo‘lsa, u holda tanlanma dispersiyasi

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_k (x_k - \overline{x_T})^2 \qquad (3)$$

yoki $$D_T = (x)^2 - (\overline{x_t})^2 \qquad (3^*)$$

Agar belgining $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ qiymatlari turlicha bo‘lsa, u holda tanlanma dipersiyasi

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_k (x_k - \overline{x_T})^2 \qquad (4).$$

Tanlanma kvadratik chetlanish deb, tanlanma dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} \qquad (5)$$

Katta chastotaga ega bo‘lgan variant qiymatiga moda deyiladi va uni M_0 bilan belgilanadi. Statistik taqsimotni teng ikki qismga bo‘ladigan variantning qiymati mediana deb aytiladi va u M_e bilan belgilanadi.

$$\begin{cases} x_{k+1}, & agar\ n = 2k+1\ bo'lsa, \\ \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}), & agar\ n = 2k\ bo'lsa, \end{cases}$$

Turli tanlanmalar qiymatlarining o‘rtacha qiymati atrofida tarqoqligini taqqoslash maqsadida variatsiya koeffitsientidan foydalaniladi. Variatsiya koeffitsienti V_T bilan belgilanadi.

$$V_T = \frac{\sigma_T}{x_T} \cdot 100\%$$

Masala 1. Yetishtirilgan yangi nav kartoshka hosildorligini o‘rganish maqsadida kartoshka maydonidan 50 tupi qazilgan. Bu tuplardagi kartoshkalar soni quyidagi tanlanma to‘plamidan iborat: 6, 7, 5, 8, 3, 7, 9, 5, 8, 7, 4, 6, 8, 7, 5, 8, 10, 6, 7, 8, 9, 7, 8, 9, 9, 6, 7, 5, 10, 9, 7, 8, 6, 11, 7, 5, 4, 6, 7, 8, 11, 9, 6, 8, 10, 12. Bu ma’lumotlarga asoslanib, tanlanma diskeret variatsion qatori va uning sonli xarakteristikalari: tanlanma o‘rtacha qiymati, tanlanma dispersiyasi, o‘rtacha kvadratik chetlanishi, modasi, medianasi va variatsiya koeffisieynti topilsin.

Yechilishi k-to‘pdan olingan kartoshkalar son X_k(dona) orqali belgilaymiz. Qazilgan 50 tupning har biridan olingan kartoshkalar soni X_k ning qiymatlarini o‘sish tartibida yozib chiqamiz:3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12 va hosil qilingan variatsion qator yordamida tanlanma statistik taqsimotini tuzamiz:

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	1	2	5	8	12	9	6	4	2	1

Endi tuzilgan statistik taqsimot yordamida tanlanma sonli xarakteristikalarni hisoblaymiz:

1) X_T ning qiymati (2) formula bo‘yicha:

$$\overline{X}_T = \frac{1}{50}(1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 5 + 8\cdot 6 + 12\cdot 7 + 9\cdot 8 + 6\cdot 9 + 4\cdot 10 + 2\cdot 11 + 1\cdot 12) = 7{,}06\,.$$

2)Tanlanma dispersiyasi (3*) formula orqali hisoblash qulaydir, qayerda $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^2$, bizning masala uchun $\overline{x^2} = \frac{1}{50}(1\cdot 3^2 + 2\cdot 4^2 + 5\cdot 5^2 + 8\cdot 6^2 + 12\cdot 7^2 + 9\cdot 8^2 + 6\cdot 9^2 + 4\cdot 10^2 + 2\cdot 11^2 + 1\cdot 12^2) = 57{,}8$

$D_T = \overline{x^2} - (\overline{x_T})^2 = 57{,}8 - (7{,}06)^2 = 57{,}8 - 49{,}84 = 7{,}96$

3) O‘rtacha kvadratik chetlanish: $\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{7{,}96} = 2{,}82;$

4) Variatsiyaning moda qiymati: $M_0 = 7$, medianani topamiz: variantlar soni juft bo‘lganligidan, $2k = 10, M_e = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(7 + 8) = 7{,}5.$

Variatsiya qulochi wsa $R = (\max X - \min X) = 12 - 3 = 9$ Variatsiya koeffisenti: $V_T = 40\%$

2.Taqsimot parametrlarining statistik baholari.

Matematik statistikaning muhim(asosiy) vazifalaridan biri statistik ma’lumotlarini tahlil qilish metodlarini xayotiy masalalarni yechishga moslab chiqishdan iboratdir. Masalan, bularga: a) ma’lum jarayonni ifodalovchi hodisaning noma’lum ehtimolini baholash; b) bosh to‘plam belgisining noma’lum taqsimot qonunining ko‘rinishi ma’lum bo‘lganda, uning ma’lum parametrlarini baholash kabi masalalar misol bo‘la oladi.

Xususan, amaliyotga tadbiq nuqtai nazaridan bunday baholar xo‘jalikda yetishtirilgan paxtadan joriy yilda olinadigan o‘rtacha hosilni, terim boshlanishidan oldin chamalash imkoniyatlarini beradi, bu esa terimga va unga beriladigan ish haqlarini berishni tashkil etishga hamda paxtadan olinadigan sof daromadni aniqlashga yordam beradi.

Aytaylik, o‘rganilayotgan X belgining bosh to‘plamda normal taqsimlangan ma’lum bo‘lsa uning noma’lum matematik kutilishi a va o‘rtacha kvadratik chetlanish σ ni baholash talab etiladi. Bu ikki parametr normal taqsimotni to‘liq aniqlaydi. Kuzatuvchining ixtiyorida belgining n ta kuzatish natijasida olingan $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ larni erkli tasodifiy miqdorlar deb qaraladi. Masalan, normal taqsimotning matematik kutulishi uchun baho bo‘lib, ushbu $a = \overline{X}_T = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)$ funksiya (kuzatiladigan qiymatlarning arifmetik o‘rtachasi) xizmat qiladi.

Ta’rif 1. Nazariy taqsimot noma’lum parametrining statistik bahosi deb, kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzulgan funksiyaga aytiladi.

Umumiy holda, nazariy taqsimot Q noma’lum parametrlarning statistik bahosi $Q_n^* = Q_n^*(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ orqali belgilanadi. $Q_n^* - Q$ (ayirmani) miqdorni bahoning aniqligi deyiladi. Bu miqdor qancha kichik bo‘lsa, Q_n^* baho Q parametr uchun shuncha aniq bahol bo‘ladi. Statistik baholar ichida sistematik xatoga ega bo‘lmagan va eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgan baholarni eng yaxshi, amaliyot uchun ahamiyatli deyiladi.

Ta’rif 2. Agar Q_n^* bahoning matematik kutulishi MQ_n^* baholanayotgan Q parametrga teng ($MQ_n^* = Q$) bo‘lsa, u holda Q_n^* bahoni siljimagan baho deyiladi. Agar $MQ_n^* \neq Q$ bo‘lsa, Q_n^* bahoni siljigan baho deyiladi.

Ta’rif 3. Agar har qanday $\delta > 0$ son uchun $n \to \infty$ da $\lim_{n\to\infty} P\{|Q_n^* - Q| < \delta\} = 1$ tenglik bajarilsa, u holda Q_n^* asosli baho va δ sonini aniqligi deyiladi.

Ta’rif 4. n hajmli tanlanma uchun mumkin bo‘lgan eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgan statistik bahoga effektiv baho deyiladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

Teorema 1. $\overline{X}_T$ tanlanma o‘rta qiymat bosh to‘plamning matematik kutulishi $Mx = a$ uchun siljimagan asosli baho bo‘ladi.

Teorema 2. Tuzatilgan tanlanma dispersiyasi $S_T^2 = \frac{n}{n-1} D_T$ baho, X belgili bosh to‘plamning dispersiyasi $\sigma^2 = Dx$ uchun siljimagan asosli baho bo‘ladi.

Teorema 3. $Q_n^*(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ baho Q parametrning asosli bahosi uchun $MQ_n^* = Q$ va $\lim_{n\to\infty} DQ_n^* = 0$ bo‘lishi yetarlidir.

Tuzatilgan tanlanma dipersiyadan olingan kvadrat ildizga tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlatish deyiladi $S_T = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_T} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \sigma_T$ qayerda $\sigma_T = \sqrt{D_T}$.

Eslatma. Ushbu $D_T = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n_k (x_k - \overline{x_T})^2$, $S^2{}_T = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x_T})^2 n_k$ formulani taqqoslasak, ular bir-biridan maxrajlari bilan farqlanadi. Tanlanma hajmi n yetarli katta bo‘lganda, ular bir-biriga yaqin bo‘ladi, $n > 30$ da S_T^2 dan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

3. Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol(ishonchlilik) va ishonchli intervallar

Ta’rif 5. Bitta son bilan aniqlanadigan bahoga nuqtaviy baho deyiladi.

Masalan, $\overline{x_T}, S^2, \sigma_T$ nuqtaviy baholarga misol bo‘ladi. n kichik bo‘lganda nuqtaviy baho baholanayotgan parametrdan ancha farq qilishi mumkin. Shu sababli tanlanma hajmi n uncha katta bo‘lmaganda interval baholardan foydalanish lozim.

Ta’rif 6. Interval baho deb, ikkita son-intervalning uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi.

Tanlanma ma’lumotlr bo‘yicha topilgan Q_n^* baho Q noma’lum parametrning bahosi bo‘lib xizmat qiladi.

Ta’rif 7. Qning Q_n^* baho bo‘yicha ishonchliligi deb, $|Q_n^* - Q| < \delta (\delta > 0)$ tengsizlikni amalga oshish ehtimoli P ga aytiladi va ishonchilikni γ bilan belgilaymiz.

Ta’rifga ko‘ra, $P\{|Q_n^* - Q| < \delta\} = \gamma$ yoki $P\{Q_n^* - \delta < Q < Q_n^* + \delta\} = \gamma$ munosabatni yoza olamiz. Bu munosabatni esa: $(Q_n^* - \delta, Q_n^* + \delta)$ intervalning noma’lum Q parametrni o‘z ichiga olish(qoplash) ehtimoli γ ga tengligini bildiradi. Ishonchlilik γ sifatida $0,95; 0,99; 0,999$ sonlardan biri olinadi.

Ta’rif 8. Ishonchli interval deb, noma’lum parametrni berilgan γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(Q_n^* - \delta, Q_n^* + \delta)$ intervalga aytiladi.

4. Normal taqsimotning noma’lum parametrlari uchun ishonch intervallari

1. $\sigma -$ ma’lum bo‘lgan hol.

Bosh to‘plamning son belgisi X normal taqsimlangan va $\sigma -$ ma’lum bo‘lsin. Noma’lum $a -$ matematik kutulishi tanlanma o‘rta qiymat $\overline{X}_T$ orqali baholash talab qilinadi. Boshqacha qilib aytganda, $a -$ parametrni γ - ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervalini topish talab etiladi.

Bizga ehtimollar nazariyasi kursidan ma’lumki agar X_k tasodifiy miqdorlar bir xil normal taqsimlangan bo‘lsa, holda $\overline{X}_T = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n)$ va tanlanma o‘rtacha qiymat ham normal taqsimlangan bo‘lib, $M\overline{X} = a, \sigma(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bo‘ladi.

Ushbu $P\{|x - a| < \delta\} = \gamma$ munosabat bajarilishini talab qilamiz.

Agar X tasodifiy miqdori tasodifiy normal taqsimlangan bo‘lsa, u holda

$$P\{|x - a| < \delta\} = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}) \qquad (6)$$

tenglik o‘rinlidir.

UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

Agar (6) formuladagi X ni ga, σ ni $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ almashtirsak,

$$P\{|x-a|<\delta\}=2\Phi(\delta\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t) \qquad (7)$$

tenglikka ega bo‘lamiz, $t=\delta\sqrt{n}/\sigma$, bundan esa $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$, u holda (7) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$P\{|\bar{x}_T-a|<\delta\}=2\Phi(t\sigma/\sqrt{n})=2\Phi(t) \qquad (8)$$

yoki

$$P\{\bar{x}_T-t\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{x}_T+t\sigma/\sqrt{n}\}=2\Phi(t)=\gamma \qquad (9)$$

formulani hosil qilamiz. Demak, a uchun $\sigma-$ ma’lum bo‘lganda γ kafolat bilan intervalli baho quyidagicha bo‘ladi:

$$\bar{x}_T-t\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{x}_T+t\sigma/\sqrt{n} \qquad (10)$$

interval xizmat qiladi.

Eslatma 1. 1) Tanlanma hajmi n ning ortishi bilan $\sigma-$son kamayadi, natijada (10) bahoning aniqligi ortadi;

2) $\gamma=2\Phi(t)$ ehtimollik yoki ishonchlilikning ortishi bilan t ning qiymati ortadi (chunki $\Phi(t)$ funksiya o‘suvchidir), bu esa $\sigma-$ning ortishiga hamda (10) bahoning aniqligining pasayishiga olib keladi.

Eslatma 2. Agar a ning oldindan berilgan $\sigma-$aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa unholda u aniqlikni ta’minlab beradigan tanlanmaning minimal hajmin $n=t^2\sigma^2/\delta^2$ formuladan topiladi.

2. $\sigma-$ noma’lum bo‘lgan hol.

Aytaylik, bosh to‘plamning X son belgisi normal taqsimlangan, shu bilan birga σ_T-o‘rtacha kvadrat chetlanish noma’lum bo‘lsin. Noma’lum matematik kutilish a ni ishonchli intervallar orqali baholash talab etiladi.

Tanlanma ma’lumotlarga asoslanib, $T_n=(\bar{X}_T-a)\sqrt{n}/S_T$ tasodifiy miqdorni tuzamiz. Bu miqdor $k=n-1$ ozodli darajali parametrli Student taqsimotga ega bo‘ladi. Bu yerda $\bar{X}_T-$tanlanma o‘rtacha qiymat, S_T-tuzatiladigan o‘rtacha kvadratik chetlanish, $n-$tanlanma hajmi. U holda

$$P\{|\bar{x}_T-a|\cdot\sqrt{n}/S_T<t_\gamma\}=2\Phi(t)=\gamma \qquad (11),$$

munosabat bajarilishini talab qilamiz, $\gamma-$ berilgan ishonchiligi (11) dan

$$P\{\bar{x}_T-t_\gamma S_T/\sqrt{n}<a<\bar{x}_T+t_\gamma S_T/\sqrt{n}\}=\gamma \qquad (12)$$

Natijada σ_T-noma’lum bo‘lganda, noma’lum $a-$parametrni γ ishonchlilik bilan qoplaydigan , quyidagi $(\bar{x}_T-t_\gamma S_T/\sqrt{n};\bar{x}_T+t_\gamma S_T/\sqrt{n})$ ishonchli intervalga ega bo‘lamiz, $t_\gamma=t(n,\gamma)$ ning qiymati berilgan n va $\gamma-$ lar bo‘yicha Student taqsimot jadvalidan topish mumkin.

3. $\sigma-$ ni baholash bo‘yicha ishonchli intervallar.

Bosh to‘plamning X son belgisi normal taqsimlangan bo‘lsin. Bosh to‘plamning o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma-$ ni tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi S_T orqali baholash talab qilinadi.

Aytaylik, quyidagi munosabat bajarilsin:

$$P\{|\sigma-S_T|<\delta\}=2\Phi(t)=\gamma \qquad (13)$$

yoki

$$P\{S_T-\delta<\sigma<S_T+\delta\}=\gamma,$$

OPEN ACCESS

UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

bundan esa $S_T-\delta<\sigma<S_T+\delta$ yoki $S_T(1-\frac{\delta}{S_T})<\sigma<S_T(1+\frac{\delta}{S_T})$, u holda

$$S_T(1-q)<\sigma<S_T(1+q) \qquad (14)$$

qayerda $q=\frac{\delta}{S_T}$

Normal taqsimlangan X miqdoriy belgining $\sigma-$o‘rtacha kvadratik chetlanishini S_T- tuzatilgan tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanish bo‘yicha γ ishonchlilik bilan baholash uchun quyidagi keltirilgan ishonchlilik intervali xizmat qiladi.

$S_T(1-q)<\sigma<S_T(1+q)$ ($q<1-$ bo‘lganda) va

$$0<\sigma<S_T(1+q)\ (q>1-\text{ bo‘lganda}) \qquad (15)$$

q ni jadavalda (4-ilovada) berilgan n va $\gamma-$lar bo‘yicha topiladi, $q=q(n,\gamma)$.

Xozir esa yuqorida keltirilgan na’munaviy masala shartidagi maydonga ekilgan yangi nav kartoshka ekinidan olinadigan kartoshka hosilini chamalsh(baholash), biror kafolat bilan o‘rtacha hosil miqdoriga ishonch intervalini ko‘rish masalasini qaraylik.

Boshqacha aytganda, har bir tupdagi yetilgan kartoshkalar soni X ni normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblab, uning noma’lum matematik kutilish a ga 95% li ishonch intervalini ko‘ramiz. Aslida amaliyotda $\sigma-$noma’lum bo‘ladi, shuning uchun talab qilingan intervalni (11) formula orqali aniqlaymiz. Ma’lumki, $S_T=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_T}=\sqrt{\frac{50}{49}\cdot 7,96}=2,85$ $n=50,\bar{x}_T=7,06,t_\gamma=t(50;0,95)=2,06.$ U holda, (11)

formulaga asosan quyidagi intervalga ega bo‘lamiz: (6,25< a <7,87).

Demak, o‘rtacha tasodifan olingan 100 tup kartoshka ekinida yetishtirilgan kartoshkalar soni (6,25; 7,87) orasida bo‘lishi 95% kafolat bilan tasdiqlanadi.

Masala 2. Ko‘p sondagi elektr lampalar partiyasidan olingan tanlanmada 100 ta lampa bor. Tanlanmadagi lampaning o‘rtacha yonish davomiyligi 1000 soatga teng. Lampaning o‘rtacha yonish davomiyligining o‘rtacha kvadratik chetlanishi 40 soat ekanligi ma’lum. Jami partiyadagi lampaning o‘rtacha yonish davomiyligini 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

Yechilishi. Masala shartiga ko‘ra $n=100;\bar{x}_T=1000;\sigma=40$ o‘rtacha yonish davomiyligi a, $\gamma=0,95$. U holda (10) formulaga asosan berilgan masalani yechamiz. $\bar{x}_T-t\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{x}_T+t\sigma/\sqrt{n}$ bundagi $t-$ ni $2\Phi(t)=\gamma$ dan ham topish mumkin, u holda $\Phi(t)=0,475\Rightarrow t=1,96$ bu qiymatlarni (10) formulaga qo‘yamiz: $1000-1,96\cdot 40/10<a<1000-1,96\cdot 40/10$. Javob: 992,16< a <1007,84.

Masala 3. Bosh to‘plamdan $n=12$ hajmli tanlanma olingan

variant	x_i	-0,5	-0,4	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
chastota	n_i	1	2	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to‘plamning normal taqsimlangan belgisining a matematik kutilishi 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli interval yordamida baholang.

Yechilishi. Bu masalani (12) formula yordamida yechamiz. Bundan $\bar{x}_T-t_\gamma S_T/\sqrt{n}<a<\bar{x}_T+t_\gamma S_T/\sqrt{n}$ (**) $\bar{x}_T=\frac{1}{n}\sum_k n_k x_k=\frac{1}{12}\cdot 5=0,4166\approx 0,417$,

$\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum_k n_k x^2{}_k=\frac{7,78}{12}=0,648;$ u holda $D_T=0,648-(0,417)^2=0,648-0,174=0,474;$

$\bar{S}_T=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_T}=\sqrt{\frac{12}{11}\cdot 0,474}=\sqrt{0,517}=0,719,\quad t_\gamma=t(n,\gamma)=t(12;0,95)=2,2$ topilgan qiymatlarni (**) ga qo‘yamiz.

$0,417-2,2\cdot 0,719\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}<a<0,417+2,2\cdot 0,719\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}$ yoki $0,417-0,457<a<0,417+0,457$. Javob: -0,4< x <0,874

Masala 4. Biror fizik kattalikni bitta asbob (sistematik xatosiz) 10 marta o‘lchgan, bunda o‘lcham tasodifiy xatolarining o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,8 ga teng bo‘lib chiqdi. Asbobning aniqligini 0,95 ishonchilik bilan toping.

Yechilishi: Asbobning aniqligi o‘lchash xatolarining o‘rtacha kvadrat chetlanishi bilan xarakterlanadi. Shu sababli masala $\sigma-$ ni berilgan $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan qoplaydigan (15) formuladagi ishonchli intervalni topishga keltiramiz.

Masalaning shartiga ko‘ra, $\gamma=0,95$ va $n=10$ ma’lumotlar bo‘yicha jadvaldan (4-ilova) $q=q(n,\gamma)$ ga asoslanib, $q=q(10;0,95)$ ning qiymati $q=0,65$ ekanligini topamiz. Natijada $S_T=0,8; q=0,65$ ni (15) formulaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz: $0,28<\sigma<1,32$.

Masala 5. Bosh to‘plamdan olingan $n=16$ hajmli tanlanma ma’lumotlari normal taqsimlangan miqdoriy belgining tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi $S_T=1$, topilgan $\sigma-$bosh o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervalni toping.

Yechilishi: Masalani (15) formuladagi ishonchlilik intervalini topishga keltiramiz va $\gamma=0,95$ va $n=16$ ma’lumotlar jadvali bo‘yicha jadvaldan (4-ilova) $q=q(n,\gamma)$ bo‘yicha ekanligini topamiz va $q=0,44<1$ bo‘lganligini hisobga olgan holda (15) formuladan, ushbu ishonchli intervalni topamiz: $0,56<\sigma<1,44$.

IV. Biz yuqorida ehtimollar nazariyasi markaziy limit teoremasining qishloq xo‘jaligiga, matematik fizika tenglamalarini yechishga va matematik statistika taqsimot parametrlarini baholashga tatbiqlarini keltirdik. Lekin kitobxonda markaziy limit teoremaning xalq xo‘jaligining boshqa tarmoqlarida ham qo‘llanishida keng tassavurga ega bo‘lishi uchun ayrim turdagi har xil masalalarni va ularni yechishda ishlatiladigan uslubiy ko‘rsatmalarni keltiramiz.

Masala 1. Fakultet talabalarining bitta predmetdan test-reyting nazorat turlarini “4” va “5” baholarga topshirish ehtimoli 0,1 ga teng, tasodifan olingan talabalarning 34 dan 55 tagacha bitta predmetdan reyting-nazorat turlarini “3” dan kichik bahoga topshirish ehtimolini 0,84 ehtimollik bilan kutish mumkin bo‘lishi uchun nechta talaba olinishini lozim?

Yechilishi: Shartga ko‘ra $p=0,1; q=0,9; k_1=34; k_2=55; P_n(34;55)=0,84; n=?$. U holda $P_n(34;55)=\Phi(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})$, yoki $0,84=\Phi(\frac{55-0,1n}{0,3\sqrt{n}})-\Phi(\frac{34-0,1n}{0,3\sqrt{n}})$. Masala shartiga ko‘ra, $k_2<n-$ (xususiy holda $k_2=n$) bo‘lsa, $\Phi(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}})=\Phi(\frac{55-0,1n}{0,3\sqrt{n}});\Rightarrow\frac{55-0,1n}{0,3\sqrt{n}}>5;\Phi(x>5)=\frac{1}{2}-$ deb qabul qilingan. U holda $0,84=0,5-\Phi(\frac{34-0,1n}{0,3\sqrt{n}})$; yoki $\Phi(\frac{34-0,1n}{0,3\sqrt{n}})=-0,34$ bundan Laplas funksiyasining toqligidan $\Phi(1)=0,34\Rightarrow\Phi(-1)=-0,34\Rightarrow\frac{34-0,1n}{0,3\sqrt{n}}=-1$ yoki $34-0,1n=0,3\sqrt{n}$ yoki $0,1n-0,3\sqrt{n}-34=0$ kvadrat tenglamani yechib, $\sqrt{n}=20$ yoki $n=400$ ni topamiz.

Demak, fakultetdagi 400 ta talabadan 34 tadan 55 tagachasi test-reyting nazorat turlarini “3” dan kichik bahoga topshirar ekan.

Masala 2. Har bir $[0;4]$ kesmada tekis taqsimlangan 75 ta bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar qo‘shilmoqda. Bu tasodifiy miqdorlar yig‘indisining zichligi uchun taqribiy ifodani yozing va yig‘indini 120 daan 160 gacha oraliqda bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechilishi: $X=\sum_{k=1}^{75}X_k$, bunda X_k lar $[0;4]$ oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. U holda $m_k=a=MX_k=\frac{0+4}{2}=2;\quad DX_k=\frac{(4-0)^2}{12}=\frac{4}{3};\sigma_k=\sqrt{DX_k}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$ Markaziy limit teoremasining shartlari bajariladi, shuning uchun tasodifiy miqdor zichligi quyidagiga teng bo‘ladi, ya’ni $P(x)=\frac{1}{\delta_x\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m_x)^2/(2\delta_x{}^2)}$, qayerda $m_x=M(\sum_{k=1}^{75}X_k)=\sum_{k=1}^{75}MX_k=75\cdot 2=150,$ $\sigma_x^2=D(\sum_{k=1}^{75}X_k)=\sum_{k=1}^{75}DX_k=75\cdot\frac{4}{3}=100,$ u holda $\overline{P}(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-(x-150)^2/(200)}$. Endi izlayotgan ehtimollikni hisoblaymiz. $P\{120<X<160\}=\Phi(\frac{160-150}{10})-\Phi(\frac{120-150}{10})=\Phi(1)+\Phi(3)$ yoki $P\{120<X<160\}=0,3413+0,49865\approx 0,84.$

Masala 3. Avtomat detallarni shtampovka qiladi. Detalning normal taqsimlangan uzunligi X (loyihadagi uzunligi) nazorat qiladi. X ning matematik kutulishi $50\,mm$ bo‘lishi ehtimolini toping.

Yechilishi: Masalaning yechimini (*) formuladan foydalanib topamiz, lekin masala shartida $\sigma-$ o‘rtacha kvadratik chetlanish noma’lum, uni esa $P\{32<x<68\}=1$ dan topiladi. $P\{32<x<68\}=1\Rightarrow\sigma=3,6$ va (*) formulaga asosan $a)P\{55<x<68\}=0,0823$ va $b)P\{32<x<40\}=0,0027$ ekanligi kelib chiqadi.

Masala 4. Biror moddani tarozida tortish sistematik xatolarsiz o‘tkaziladi. Tarozida tortishning tasodifiy xatolari o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=20g$, bo‘lgan normal qonunga bo‘ysunadi. Tarozida tortish absalyut qiymati $10g$ dan oshmaydigan xato bilan o‘tkazilishining ehtimolini toping.

Yechilishi: Bu masalani (6) formula bilan yechamiz. $P(|x|<10)=2\Phi(0,5)=0,38.$

Masala 5. Avtomat sharchalar tayyorlaydi. Agar sharcha $X-$ diametrining loyihadagi o‘lchamidan chetlanishi absalyut qiymati bo‘yicha $0,7mm$ dan kichik bo‘lsa, sharcha yaroqli hisoblanadi. X tasodifiy miqdor $\sigma=0,4mm$ o‘rtacha kvadratik chetlanis bilan normal taqsimlangan deb hisoblab, tayyorlangan 100 ta sharchadan nechtasi yaroqli bo‘lishini aniqlang.

Yechilishi: $X-$ chetlanish (sharcha diametrning loyihadagi o‘lchamidan) bo‘lgani uchun $MX=a=0$ u holda (6) ga asosan, masala shartiga ko‘ra $\delta=0,7;\sigma=0,4$ teng va $P(|x|<0,7)=2\Phi(\frac{0,7}{0,4})=2\Phi(1,75)=2\cdot 0,4599=0,92.$ Shunday qilib, $0,7mm$ dan kichik chetlanishning ehtimoli 0,92 ga teng, bundan 100 ta sharchadan 92 tasi yaroqli bo‘lishi kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. X.Abdurasulov . Markaziy limit teoremasining qishloq xo‘jalik masalalariga yechishga tatbiqi. “Qarshi muhandislik iqtisodiyot instituti” 2023/1. Qarshi. 5-bet.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1–2. – М.: Мир, 1984.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2010.
4. Лаплас П.С. Аналитическая теория вероятностей. – М.: Наука, 1986.
5. Крамер Х. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.
7. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989.
8. Mood A.M., Graybill F.A., Boes D.C. Introduction to the Theory of Statistics. – New York: McGraw-Hill, 1974.
9. Casella G., Berger R.L. Statistical Inference. – Belmont: Duxbury Press, 2002.
10. Rice J.A. Mathematical Statistics and Data Analysis. – Belmont: Brooks/Cole, 2007.

11. Wackerly D., Mendenhall W., Scheaffer R. Mathematical Statistics with Applications. – Boston: Cengage Learning, 2008.
12. Hogg R.V., Craig A.T. Introduction to Mathematical Statistics. – New York: Macmillan, 1995.
13. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1999.
14. Солодовников В.Т. Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.
15. Ўзбекистон Республикаси Олий таълим муассасалари учун “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fan dasturi. – Тошкент, 2022.