UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://sr-journals.org/index.php/UJMTCS

Yuqori tartibli, o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar: nazariy asoslar va yechish algoritmlari

Muxabbat Gulomova Maxmudovna,
Qarshi davlat texnika universiteti, “Oliy matematika” kafedrasi katta o‘qituvchisi,
muhabbatgulomova05@gmail.com

Annotatsiya. Maqolada yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalarning nazariy mazmuni, xarakteristik tenglama orqali yechish g‘oyasi, ildizlar turiga ko‘ra umumiy yechimni qurish usullari va amaliy algoritmlari yoritiladi. Tadqiqotda analitik-tahliliy yondashuv asosida n-tartibli chiziqli tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi, takroriy hamda kompleks ildizlar holati, boshlang‘ich shartlar orqali xususiy yechimni aniqlash tartibi izohlanadi. Natijalar sifatida yechish bosqichlari, ildizlar klassifikatsiyasi va tipik misollar asosida mavzuni o‘qitish hamda mustaqil o‘zlashtirish uchun qulay metodik tavsiyalar ishlab chiqildi.

Kalit so‘zlar: differensial tenglama, yuqori tartibli tenglama, o‘zgarmas koeffitsiyent, bir jinsli tenglama, xarakteristik tenglama, umumiy yechim, fundamental sistema, kompleks ildiz.

Аннотация. В статье рассматриваются теоретические основы однородных линейных дифференциальных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами, идея решения с помощью характеристического уравнения, построение общего решения в зависимости от типа корней и практические алгоритмы решения. На основе аналитического подхода раскрываются фундаментальная система решений, случаи кратных и комплексных корней, а также порядок определения частного решения по начальным условиям. В качестве результата предложены этапы решения, классификация корней и методические рекомендации, удобные для преподавания и самостоятельного изучения темы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, уравнение высшего порядка, постоянные коэффициенты, однородное уравнение, характеристическое уравнение, общее решение, фундаментальная система, комплексный корень.

Abstract. The article examines the theoretical foundations of higher-order homogeneous linear differential equations with constant coefficients, the idea of solving them by means of the characteristic equation, the construction of the general solution depending on the type of roots, and practical solution algorithms. Using an analytical approach, the paper explains the fundamental system of solutions, repeated and complex roots, and the procedure for determining a particular solution from initial conditions. The results include a step-by-step solution scheme, a classification of roots, and methodological recommendations suitable for teaching and independent learning.

Keywords: differential equation, higher-order equation, constant coefficient, homogeneous equation, characteristic equation, general solution, fundamental system, complex root.

Kirish. Differensial tenglamalar matematikaning nazariy va amaliy yo‘nalishlarini bog‘lovchi muhim bo‘limlaridan biridir. Mexanika, elektrotexnika, tebranishlar nazariyasi, avtomatik boshqaruv, issiqlik tarqalishi, radiotexnika, iqtisodiy dinamika va boshqa ko‘plab sohalarda jarayonning holati nafaqat funksiyaning o‘z qiymati, balki uning hosilalari bilan ham belgilanadi. Shu sababli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar real hodisalarni matematik modellashtirishda alohida o‘rin tutadi. O‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalar nazariy jihatdan ixcham, amaliy jihatdan esa juda samarali yechim mexanizmiga ega. Bunday tenglamalarda noma’lum funksiya va uning hosilalari oldidagi koeffitsiyentlar o‘zgarmas sonlardan iborat bo‘ladi, tenglamaning o‘ng tomoni esa nolga teng. Natijada eksponensial funksiyani sinov yechim sifatida tanlash mumkin bo‘ladi

va berilgan differensial tenglama algebraik xarakteristik tenglamaga keltiriladi. Mavzuning dolzarbligi shundaki, xarakteristik tenglama usuli talabalarda differensial va algebraik fikrlashni integratsiyalashga xizmat qiladi. Bir tomondan, u hosilalar, chiziqlilik, yechimlar fazosi, boshlang‘ich shartlar kabi nazariy tushunchalarni talab qiladi; ikkinchi tomondan esa ko‘phad ildizlari, kompleks sonlar, takroriy ildizlar va determinantlar bilan ishlashni zarur qiladi. Shuning uchun mazkur mavzu oliy matematika kursida mantiqiy izchillik, hisoblash madaniyati va modellashtirish kompetensiyasini rivojlantirish uchun qulay metodik platforma hisoblanadi.

Metodlar. Tadqiqotning metodologik asosini analitik tahlil, matematik umumlashtirish, algebraik reduksiya va misollar asosida tekshirish usullari tashkil etadi. Avvalo n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama umumiy ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda $\boldsymbol{a_0, a_1, \ldots, a_n}$ koeffitsiyentlar haqiqiy yoki kompleks o‘zgarmas sonlar bo‘lib, $\boldsymbol{a_n \neq 0}$ sharti tenglamaning haqiqatan n-tartibli ekanligini bildiradi**.**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_n \neq 0.$$

Ushbu tenglamani yechishda asosiy g‘oya eksponensial ko‘rinishdagi $y = e^{\lambda x}$ funksiyani sinov yechim sifatida qo‘yishdan iborat. Chunki eksponensial funksiyaning har bir hosilasi yana shu funksiyaga proporsional bo‘ladi. Natijada differensial tenglama umumiy ko‘paytuvchi $e^{\lambda x}$ ga qisqaradi va λ ga nisbatan algebraik tenglama hosil bo‘ladi.

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Hosil bo‘lgan $p(\lambda) = 0$ tenglama xarakteristik tenglama deyiladi. Uning ildizlari differensial tenglamaning fundamental yechimlarini aniqlaydi. Agar xarakteristik tenglama n ta ildizga ega bo‘lsa, ularning har biri tegishli ravishda bitta yoki bir nechta mustaqil yechimlarni hosil qiladi. Shu nuqtada chiziqli algebra tushunchalari, ayniqsa chiziqli mustaqillik va fundamental sistema tushunchalari muhim ahamiyat kasb etadi.

Metodik jihatdan yechimni qurish jarayoni uch asosiy bosqichga ajratildi: birinchisi - berilgan differensial tenglamani standart ko‘rinishga keltirish; ikkinchisi - xarakteristik ko‘phadni tuzib, uning ildizlarini aniqlash; uchinchisi - ildizlar turiga mos ravishda umumiy yechimni yozish. Bu bosqichlar mavzuni o‘qitishda ham, mustaqil masala yechishda ham xatolarning oldini oladi.

1-jadval. Xarakteristik ildizlar turiga ko‘ra fundamental yechimlar

Ildiz turi	Shart	Yechimlar ko‘rinishi
Oddiy haqiqiy ildiz	$\lambda = r$	e^{rx}
k karrali haqiqiy ildiz	$\lambda = r$	$e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^{k-1}e^{rx}$
Oddiy kompleks juft ildiz	$\lambda = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sin\beta x$
k karrali kompleks juft ildiz	$\lambda = \alpha \pm \beta i$	$x^j\, e^{\alpha x}cos\beta x, x^j\, e^{\alpha x}sin\beta x;$ $j = 0, \ldots, k-1$

Jadvaldan ko‘rinadiki, xarakteristik ildizning algebraik karraligi differensial tenglamaning yechimlar fazosida qo‘shimcha $x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ ko‘paytuvchilarining paydo bo‘lishiga olib keladi. Kompleks ildizlar holatida esa Eyler formulasi asosida haqiqiy yechimlar sinus va kosinus funksiyalari orqali ifodalanadi. Agar tenglama koeffitsiyentlari haqiqiy bo‘lsa, kompleks ildizlar doimo qo‘shma juftlikda uchraydi.

Yechimning to‘g‘riligini tekshirish uchun uni dastlabki tenglamaga qo‘yish, shuningdek, fundamental yechimlarning chiziqli mustaqilligini Vronskiy determinanti orqali baholash mumkin. Chiziqli bir jinsli tenglama uchun n ta chiziqli mustaqil yechim topilganda, ularning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi umumiy yechimni beradi. Bu fakt superpozitsiya prinsipining matematik ifodasidir.

Natijalar. Tahlil natijasida yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalarni yechishning quyidagi umumiy algoritmi shakllantirildi. Algoritm tenglama tartibidan qat’i nazar bir xil mantiqiy tuzilishga ega bo‘lib, faqat xarakteristik ko‘phad darajasi va uning ildizlarini topish murakkabligi bilan farqlanadi.

2-jadval. Yechish algoritmining asosiy bosqichlari

Bosqich	Mazmuni
1	Tenglamani standart ko‘rinishga keltirish va tartibini aniqlash.

2	$y = e^{\lambda x}$ farazidan foydalanib xarakteristik ko‘phadni tuzish.
3	$p(\lambda) = 0$ algebraik tenglamaning haqiqiy, kompleks va takroriy ildizlarini aniqlash.
4	Har bir ildiz turiga mos fundamental yechimlarni yozish.
5	Fundamental yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali umumiy yechimni hosil qilish.
6	Agar boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsa, ixtiyoriy konstantalarni tenglamalar sistemasi orqali topish.

Birinchi tipik holat - xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari turlicha haqiqiy sonlardan iborat bo‘lishidir. Masalan, quyidagi uchinchi tartibli tenglamani qaraymiz:

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Bu tenglama uchun xarakteristik ko‘phad $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ bo‘lib, u $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$ ko‘rinishda ajraladi. Demak, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Ildizlar oddiy va haqiqiy bo‘lgani uchun umumiy yechim uchta eksponensial yechimning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Ikkinchi holat - takroriy haqiqiy ildizlarning mavjudligidir. Masalan, $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$ tenglamasida xarakteristik ko‘phad $(\lambda - 1)^4$ ko‘rinishida yoziladi. Bu holda $\lambda = 1$ ildiz to‘rt karrali. Shuning uchun bitta e^{x} yechimning o‘zi yetarli emas; chiziqli mustaqil yechimlar sistemasi $e^{x}, xe^{x}, x^2e^{x}, x^3e^{x}$ ko‘rinishda olinadi. Umumiy yechim esa quyidagicha bo‘ladi:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3)e^{x}.$$

Uchinchi holat - kompleks ildizlar bilan bog‘liq. Masalan, $y'' + 4y = 0$ tenglamasi uchun xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4 = 0$ bo‘lib, $\lambda = \pm 2i$ ildizlar hosil bo‘ladi. Bu ildizlar haqiqiy koeffitsiyentli tenglamada tebranish xarakteridagi yechimlarni beradi:

$$y = C_1 cos2x + C_2 sin2x.$$

Agar kompleks ildiz $\alpha \pm \beta i$ ko‘rinishda bo‘lsa, yechim $e^{\alpha x}$ ko‘paytuvchisi bilan ifodalanadi. Bu ko‘paytuvchi tebranish amplitudasining ortishi yoki kamayishini bildiradi. Masalan, $\lambda = -1 \pm 3i$ ildizlarga mos umumiy yechim $e^{-x}(C_1 cos3x + C_2 sin3x)$ ko‘rinishida yoziladi. Bu holat mexanikada so‘nuvchi tebranishlarni, elektrotexnikada esa qarshilikli konturlardagi o‘tkinchi jarayonlarni modellashtirishda uchraydi.

Boshlang‘ich shartlar berilganda umumiy yechimdagi $C_1, C_2, \ldots, C_n$ konstantalar aniqlanadi. Masalan, $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ shartlarini olaylik. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ bo‘lib, ildizlari 1 va 2 ga teng. Umumiy yechim $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$. Boshlang‘ich shartlardan $C_1 + C_2 = 1$ va $C_1 + 2C_2 = 0$ sistema hosil bo‘ladi. Bundan $C_2 = -1, C_1 = 2$ kelib chiqadi. Demak, xususiy yechim $y = 2e^{x} - e^{2x}$ bo‘ladi.

Natijalar shuni ko‘rsatadiki, bir jinsli o‘zgarmas koeffitsiyentli tenglamalarda yechimni topish jarayoni faqat differensial amallarga emas, balki algebraik ko‘phadlarni tahlil qilishga ham tayanadi. Shu bois bu mavzuda talabalarga ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratish, kompleks ildizlarni aniqlash va chiziqli tenglamalar sistemasini yechish ko‘nikmalari yetarli darajada shakllantirilishi zarur.

Muhokama. Yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalarni o‘qitishda eng ko‘p uchraydigan metodik muammo - talabalarning xarakteristik tenglama ildizlari va umumiy yechim ko‘rinishi o‘rtasidagi bog‘lanishni mexanik tarzda yodlab olishidir. Aslida esa bu bog‘lanish eksponensial funksiya hosilalarining xossasi, chiziqli operatorlar nazariyasi va fundamental yechimlar sistemasi bilan asoslanadi. Shuning uchun mavzuni faqat formula sifatida emas, balki mantiqiy model sifatida tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

Mazkur mavzuda bir jinslilik tushunchasini ham aniq ajratish zarur. Tenglamaning o‘ng tomoni nolga teng bo‘lsa, har qanday ikki yechimning yig‘indisi va istalgan sonli ko‘paytmasi yana yechim bo‘ladi. Bu xossa yechimlar to‘plamini vektor fazo sifatida qarash imkonini beradi. Bir jinsli bo‘lmagan tenglamalarda esa umumiy yechim bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va bitta xususiy

yechim yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Ushbu farqni tushunish keyingi mavzularni o‘zlashtirish uchun zarur poydevor yaratadi.

Takroriy ildizlar masalasi alohida metodik e’tibor talab qiladi. Talabalar ko‘pincha $\lambda = r$ ildiz ikki yoki uch karrali bo‘lganda faqat e^{rx} ni yozish bilan cheklanib qoladi. Bunday yondashuv yechimlar sonini tenglama tartibidan kam qilib qo‘yadi va umumiy yechim to‘liq bo‘lmaydi. Shu sababli har bir ildizning karraligi albatta tekshirilishi, k karrali ildiz uchun $x^0e^{rx}, x^1e^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}$ ko‘rinishidagi yechimlar yozilishi lozim.

Kompleks ildizlar holatida esa matematik mazmun bilan fizik talqin o‘rtasida bog‘liqlik yaratish mavzuni osonlashtiradi. β parametr tebranish chastotasini, α parametr esa amplitudaning o‘sishi yoki so‘nishini bildirishi mumkin. Masalan,
$\alpha < 0$ bo‘lsa, $e^{\alpha x}$ ko‘paytuvchi vaqt o‘tishi bilan kamayadi va tizimning so‘nuvchi harakatini ifodalaydi. Bu talqin differensial tenglamalarni real jarayonlar bilan bog‘lashga yordam beradi.

Mavzuni o‘qitishda bosqichli yondashuv samarali hisoblanadi: avval ikkinchi tartibli oddiy tenglamalar, keyin uchinchi va to‘rtinchi tartibli tenglamalar, undan so‘ng takroriy va kompleks ildizli masalalar berilishi kerak. Yakuniy bosqichda aralash ildizli tenglamalar hamda boshlang‘ich shartli masalalar yechiladi. Bunday ketma-ketlik kognitiv yuklamani kamaytiradi va talabani mustaqil algoritmik fikrlashga yo‘naltiradi.

Zamonaviy ta’lim sharoitida ushbu mavzuni raqamli vositalar bilan boyitish mumkin. Masalan, grafik dasturlar yordamida $e^{\alpha x}cos\beta x$ va $e^{\alpha x}sin\beta x$ funksiyalarining grafigi chizilsa, kompleks ildizlarning ma’nosi vizual ravishda aniqroq tushuniladi. Kompyuter algebra tizimlari esa hisob-kitobni tezlashtiradi, biroq ular nazariy tushunchani almashtirmasligi, balki tekshirish va tahlil vositasi sifatida qo‘llanishi lozim.

Xulosa. Yuqori tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamalar nazariy jihatdan chiziqli operatorlar, fundamental yechimlar sistemasi va superpozitsiya prinsipiga, amaliy jihatdan esa xarakteristik tenglama usuliga tayanadi. Berilgan tenglama eksponensial sinov yechim yordamida algebraik tenglamaga keltiriladi va uning ildizlari umumiy yechimning tuzilishini belgilaydi. Maqolada xarakteristik ildizlar oddiy haqiqiy, karrali haqiqiy, oddiy kompleks va karrali kompleks holatlarga ajratildi. Har bir holat uchun fundamental yechimlarni yozish qoidalari tizimlashtirildi. Natijada tenglama tartibi, ildizlar soni va umumiy yechimdagi ixtiyoriy konstantalar soni o‘rtasidagi muvofiqlik mavzuning asosiy nazariy mezoni sifatida ko‘rsatildi. O‘qitish jarayonida mavzuni samarali o‘zlashtirish uchun standart algoritmdan foydalanish, takroriy ildizlarni alohida nazorat qilish, kompleks ildizlarni grafik va fizik talqinlar bilan bog‘lash hamda boshlang‘ich shartli masalalar orqali umumiy yechimdan xususiy yechimga o‘tishni ko‘rsatish tavsiya etiladi. Shu tarzda mavzu nafaqat hisoblash ko‘nikmasini, balki talabalarining analitik fikrlash, modellashtirish va matematik xulosalash kompetensiyalarini ham rivojlantiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. New York: Wiley, 2017.
2. (Differensial tenglamalarning iqtisodiyot masalalarini yechishda qo‘llanilishi., 2026).
3. Nagle R.K., Saff E.B., Snider A.D. Fundamentals of Differential Equations. Boston: Pearson, 2018.
4. Edwards C.H., Penney D.E. Differential Equations and Linear Algebra. Boston: Pearson, 2015.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1982.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: МЦНМО, 2012.
7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва: ЛЕНАНД, 2016.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. Москва: Физматлит, 2005.