ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА КОРОТКОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Маъмуржонов Сарварбек Улугбек угли
Ташкентский государственный транспортный университет
Кафедра «Прикладная механика», Ассистент
sarvarbek.37466871@gmail.com

Аннотация. *В статье рассматривается изгиб короткой балки, лежащей на упругом основании Винклера. В отличие от классических исследований, посвящённых главным образом длинным балкам, здесь уделено внимание влиянию краевых условий и жёсткости взаимодействия с основанием на поведение коротких балок. Аналитическое решение построено с применением классической теории изгиба и функций Крылова, которые позволяют более точно описать распределение внутренних усилий и деформаций. В работе учтены ключевые особенности, выявленные в исследованиях Винклера, Тимошенко и Крылова, а также дополнены современными представлениями о безразмерных эпюрах. Полученные результаты демонстрируют критические зоны деформационного поведения и дают практические рекомендации для проектирования жёстких конструкций на упругих основаниях.*

Ключевые слова: *короткая балка, упругое основание, изгиб, аналитическое решение, функции Крылова*

QISQA BALKANING ELASTIK TAYANCHDAGI EGILISHINI O'RGANISH

Ma'murjonov Sarvarbek Ulug'bek o'g'li
Toshkent davlat transport universiteti
"Amaliy mexanika" kafedrasi, Assistent
sarvarbek.37466871@gmail.com

Annotatsiya. *Ushbu maqolada Vinkler modeli asosida elastik asosli qisqa balkaning egilishi masalasi ko'rib chiqilgan. An'anaviy uzun balka tadqiqotlaridan farqli o'laroq, ushbu ishda chetki qism effektlari va tayanch bikrligining qisqa balkalar xatti-harakatiga ta'siri alohida o'rganilgan. Analitik yechim klassik egilish nazariyasi va Krylov funksiyalari asosida tuzilgan bo'lib, ichki kuchlarning va deformatsiyalarning taqsimotini aniqroq tasvirlash imkonini beradi. Mazkur ishda Vinkler, Timoshenko va Krylovning asosiy yutuqlari inobatga olingan va zamonaviy o'lchovsiz epura ko'rinishlari bilan to'ldirilgan. Olingan natijalar deformatsion jarayonlarning kritik hududlarini aniqlashga va bikr tayanchli konstruksiyalarni loyihalashda amaliy qo'llanmalarga ega.*

Kalit so‘zlar: *qisqa balka, elastik asos, egilish, analitik yechim, Krilov funksiyalari*

INVESTIGATION OF THE BENDING OF A SHORT BEAM ON AN ELASTIC FOUNDATION

Ma’murjonov Sarvarbek Ulug’bek o’g’li
Tashkent State Transport University
Department of Applied Mechanics, Assistant
sarvarbek.37466871@gmail.com

Abstract. *This paper analyzes the bending behavior of a short beam resting on a Winkler-type elastic foundation. Unlike classical studies mainly focused on long beams, special attention is given to the influence of boundary conditions and foundation stiffness on the deformation of short beams. An analytical solution is developed based on classical bending theory and Krylov functions, enabling a more precise description of the distribution of internal forces and deformations. The study incorporates key findings from Winkler, Timoshenko, and Krylov’s works and extends them with modern dimensionless diagrams. The results highlight critical deformation zones and provide practical recommendations for the design of rigid structures supported by elastic foundations.*

Keywords: *short beam, elastic foundation, bending, analytical solution, Krylov function.*

Введение.

Расчёт балок на упругом основании является важной задачей в строительной и транспортной инженерии, поскольку такие конструкции широко используются в фундаментных плитах, дорожных покрытиях, мостах и рельсовых системах. Исторически, классическая модель упругого основания Винклера, предложенная в XIX веке, стала основой для многочисленных последующих исследований. Винклер рассматривал реакцию основания как линейную функцию прогиба, что существенно упростило математическую постановку задачи.

Однако в XX веке появились более сложные модели. Так, Тимошенко учёл инерционные и краевые эффекты, расширив классическую теорию изгиба. Крылов разработал систему специальных функций, которые решают уравнение четвёртого порядка для балки на упругом основании, что позволило учитывать более точное распределение усилий, особенно в краевых зонах.

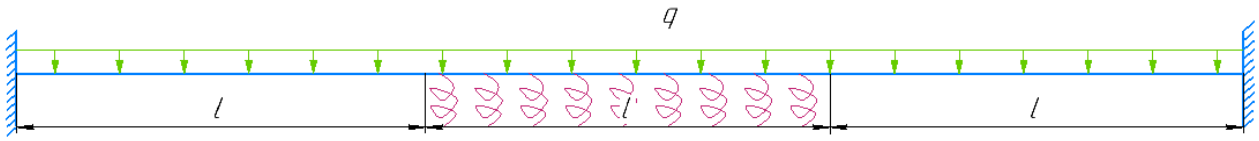
Современные исследования, например работы Хетéни и других, широко используют численные методы, такие как метод конечных элементов,

позволяющие моделировать нелинейные и сложные геометрические эффекты. Тем не менее, аналитические решения остаются важным инструментом для понимания основных физических процессов и проверки численных моделей.

Особое внимание в данной работе уделено коротким балкам, так как их поведение отличается от длинных из-за усиленного влияния граничных условий и жёсткости опор. В отличие от классических подходов, сосредоточенных на волновом характере изгиба длинных балок, в работе детально рассматривается локальное перераспределение усилий и деформаций в зоне перехода между жёсткой заделкой и упругим основанием.

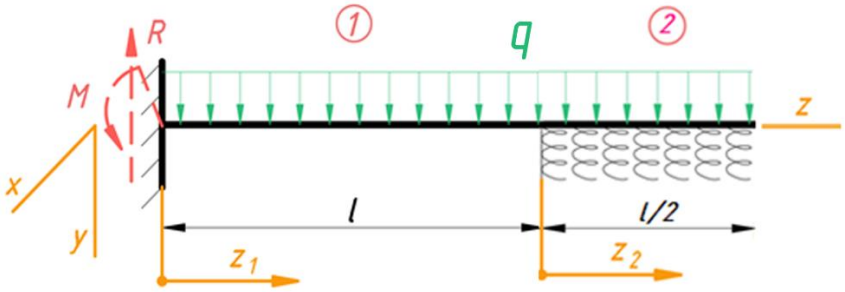
Методология исследования.

Рассмотрим балку длиной $3l$, опирающуюся в двух концах на жесткую заделку, а в середине на упругое основание с коэффициентов постели k. Для центрального участка используется полиномиальная функция прогиба, для краевых — экспоненциальная функция с затухающим характером.



$\frac{kl^4}{EJ} = 64$, где EJ – изгибная жесткость

Поскольку балка является симметричной относительно её средней линии, для упрощения задачи и снижения объёма вычислений рассматривается только её левая (правая) половина. При этом на оси симметрии накладываются соответствующие граничные условия, обеспечивающие корректное моделирование деформаций и внутренних сил в балке.



1. Участок I ($0 \le z_1 \le l$) – балка на жёсткой опоре.
2. Участок II ($0 \le z_2 \le \frac{l}{2}$) – балка на упругом основании.

Для определения последовательности решения необходимо найти

параметр $\lambda = ml$ (Безразмерная длина балки), где $m = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}}$ – константа, зависящая от изгибной жесткости и коэффициента постели.

Путем простых преобразований находим λ.

$$4m^4 = \frac{k}{EI_x} = \frac{64}{l^4};\ \lambda = ml = 2;$$

Так как $\lambda <$ 3-4, балка считается короткой.

На **участке I** записывается уравнение моментов и интегрируется дважды:

$$M_x = -M + Rz_1 - \frac{qz_1^2}{2},\ V_1'' = -\frac{M_x}{EI_x} \Rightarrow V_1 = \frac{qz_1^4}{24EI_x} - \frac{Rz_1{}^3}{6EI_x} + \frac{Mz_1{}^2}{2EI_x} + C_1z_1 + C_2$$

Константы интегрирования можно найти, записав граничные условия для левого торца (при $z_1 = 0$):

$$V_1 = 0 => C_2 = 0 \qquad V_1' = 0 => C_1 = 0$$

На **участке II** используется решение в виде линейной комбинации функций Крылова:

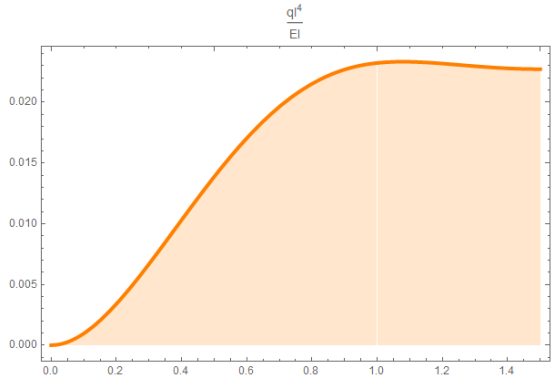
$$V_2 = \sum_{i=1}^{4} B_iK_i(mz_2) + \frac{q}{k}[1 - K_1(mz_2)]$$

Для нахождения констант B_i, накладываются условия сопряжения в точке перехода $z_1 = l, z_2 = 0$: непрерывность прогиба, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы.

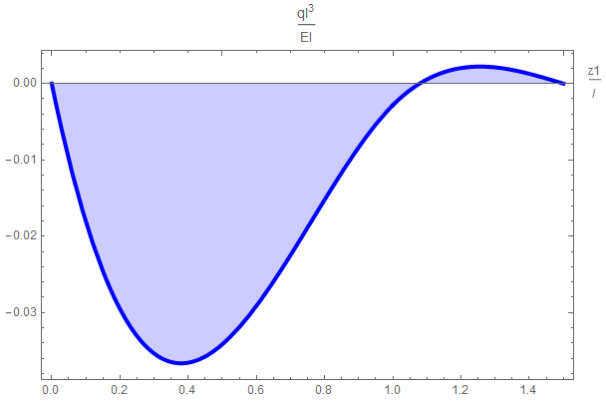
Подставив полученные аналитические выражения в исходную функцию прогибов для рассматриваемого участка балки, формулируем граничные условия на оси симметрии (в точке $z_2 = \frac{l}{2}$). Поскольку балка симметрична, накладываем условия нулевого наклона и нулевой поперечной силы:

$$V_2'(\frac{l}{2}) = 0; \quad V_2'''(\frac{l}{2}) = 0$$

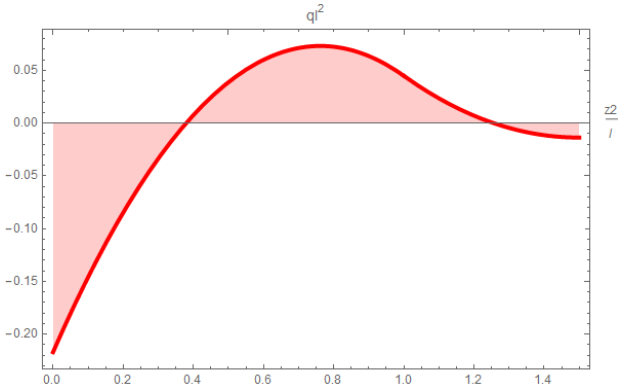
Решая эту систему, определяем искомые реакции в опорах и параметры, необходимые для полного описания деформационного состояния балки.



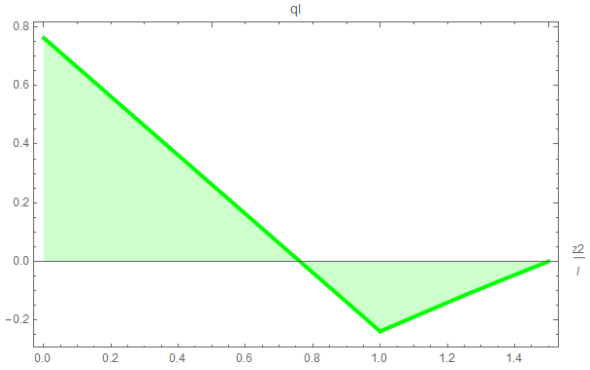
• Углы поворота сечений остаются умеренными по всей длине балки, соответствуя условию нулевого поворота в заделке и малым поворотам в зоне упора на основание



- **Эпюра изгибающих моментов** демонстрирует максимум в зоне примыкания к упругому основанию: $M_{max} = -0.22\ ql^2$



- **Эпюра поперечных сил** отражает характер изменения реакции основания



Заключение.

В работе рассмотрено аналитическое решение задачи короткой балки на упругом основании с равномерной нагрузкой. Использование функций Крылова и метод сопряжения участков позволили получить точные формулы для всех основных параметров изгиба. Полученные эпюры и выражения являются хорошей основой для практических инженерных расчётов, особенно в транспортных и фундаментных системах. В дальнейшем целесообразно провести сравнение с длинной балкой и выполнить верификацию методом конечных элементов.

Список использованных литератур:

1. Винклер Э. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, 1867.
2. Тимошенко С.П. Теория упругости, М.: Наука, 1975.
3. Крылов А.Н. О изгибе упругих балок на упругом основании, СПб, 1899.
4. Hetényi M. Beams on Elastic Foundation, University of Michigan Press, 1946.
5. Мищенко А.П. Механика деформируемого твердого тела, МГТУ, 2003.
6. Zhang, J., & Wang, Y. (2014). Elastic Foundation Effects on Beam Deflections, Journal of Engineering Mechanics.