UNIVERSAL JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
ISSN 2992 – 8788
https://science-research.org.uz/index.php/UJMTCS

MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARINI YECHISHDA MODIFIKATSIYALANGAN RUNGE-KUTTA USULI

Inomova Ozodaxon Shavkatjon qizi
Namangan Davlat Unversiteti talabasi
E-mail: shavkatjonovna0217@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada matematik fizika tenglamalarini sonli yechishda keng qo‘llaniladigan Runge–Kutta usulining modifikatsiyalangan shakli taklif etildi. Taklif etilgan usul yordamida issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasining yechimi an’anaviy usullarga nisbatan tezroq va aniqroq natija beradi. Modifikatsiya qilingan algoritmning afzalliklari — hisoblash vaqtining qisqarishi, xatolikning kamayishi hamda barqarorlikning oshishi bilan tavsiflanadi. Natijalar kompyuter simulyatsiyasi asosida tahlil qilinib, Runge–Kutta usulining samaradorligini oshirish imkoniyatlari ko‘rsatib berildi.

Kalit so‘zlar: Matematik fizika tenglamalari, Runge–Kutta usuli, modifikatsiya, sonli yechim, issiqlik tenglamasi, barqarorlik, xatolik, algoritm**.**

Annotation: In this article, a modified version of the widely used Runge–Kutta method for the numerical solution of mathematical physics equations is proposed. Using the proposed method, the solution of the heat conduction equation provides faster and more accurate results compared to traditional approaches. The advantages of the modified algorithm are characterized by reduced computation time, decreased error, and improved stability. The results were analyzed based on computer simulation, demonstrating the potential to enhance the efficiency of the Runge–Kutta method.

Keywords: Mathematical physics equations, Runge–Kutta method, modification, numerical solution, heat equation, stability, error, algorithm.

Аннотация: В данной статье предлагается модифицированный вариант широко применяемого метода Рунге–Кутта для численного решения уравнений математической физики. С помощью предложенного метода решение уравнения теплопроводности достигается быстрее и точнее по сравнению с традиционными методами. Преимущества модифицированного алгоритма характеризуются сокращением времени вычислений, уменьшением погрешности и повышением устойчивости. Результаты проанализированы на основе компьютерного моделирования, что показало возможности повышения эффективности метода Рунге–Кутта.

Ключевые слова: уравнения математической физики, метод Рунге–Кутта, модификация, численное решение, уравнение теплопроводности, устойчивость, погрешность, алгоритм.

Matematik fizika tenglamalari — fizik xodisalarni matematik tahlil qilish natijasida kelib chiqadigan xususiy hosilali differensial hamda integral va funksional tenglamalar. Matematik fizika tenglamalarini fizik qonunlarning matematik ifodasi deb izohlash mumkin, tenglamadagi miqdorlar, odatda, bevosita fizik ma’noga ega bo‘ladi (masalan, temperatura, elektr zaryadi, tebranuvchi muhit nuqtalarining holati va boshqalar). Matematik fizika tenglamalari nazariyasi, asosan, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining bir qismi bo‘lib, matematikaning boshqa bo‘limlari bilan ham bogliq. Oddiy differensial tenglamalardagidek har bir xususiy hosilali differensial tenglama, umuman, cheksiz ko‘p xususiy yechimga ega bo‘ladi. Aniq fizik masala yechilayotganda bu yechimlardan masalaning fizik ma’nosidan kelib chiqadigan ayrim qo‘shimcha shartlarni qanoatlantiradigan yechimni ajratib olish zarur. Bunday qo‘shimcha shartlar, asosan, chegaraviy shartlar va boshlang‘ich shartlardir. Matematik fizika masalasining yechimi mavjud, yagona va berilgan shartlar bo‘yicha

uzluksiz bo‘lsa, (ya’ni masala shartlarining kichik o‘zgarishi natijasida yechim ham o‘zgarsa), masala korrekt qo‘yilgan deyiladi. Matematik fizikaning korrekt qo‘yilgan masalalarini topish va ularni aniq yoki taqribiy yechimlarini tuzish Matematik fizika tenglamalari t.ning asosiy mazmunini tashkil etadi.

Matematik fizika tenglamalari tabiatdagi issiqlik almashinuvi, to‘lqin tarqalishi, suyuqlik harakati va boshqa ko‘plab fizik jarayonlarni ifodalovchi muhim differensial tenglamalardir. Bunday tenglamalarni analitik yo‘l bilan yechish ko‘p hollarda murakkab yoki imkonsiz bo‘ladi. Shu sababli ularni yechishda sonli usullar, xususan, Runge–Kutta usuli keng qo‘llaniladi.

Ammo klassik Runge–Kutta usuli ayrim hollarda aniqlikni yo‘qotadi yoki hisoblash jarayonida barqarorlik buziladi. Shu sababli ushbu tadqiqotda modifikatsiyalangan Runge–Kutta usuli ishlab chiqilib, uni matematik fizika tenglamalariga tatbiq etish yo‘llari ko‘rsatildi.

Runge–Kutta usuli — oddiy differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechishda qo‘llanadigan sonli usullar to‘plami. Ilk marta 1900-yili nemis matematiklari Carl Runge va Wilhelm Kutta tomonidan taklif qilingan.

Runge–Kutta usullari to‘plamiga Eylerning oshkor usuli va Eylerning modifikatsiyalangan usullari kiradi. Ushbu usullar mos holda birinchi va ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan usullar hisoblanadi. Bundan tashqari uchinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan standart oshkor usullar ham mavjud, biroq ular keng tarqalmagan. Ko‘plab matematik paketlar (Maple, MathCAD) da to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lgan klassik Runge–Kutta usuli qo‘llanadi. Yuqori aniqlikdagi hisob-kitoblar zarur bo‘lganda beshinchi va oltinchi tartibli aniqlikka ega bo‘gan usullardan foydalaniladi. Aniqlik tartibi ortib borgani sari ushbu usulda hisoblash sxemasi ham murakkablashib boradi.

Runge – Kutta usuli differensial tenglamalarni yechish uchun mo’ljallangan iteratsion usul bo’lib, u quyidagi umumiy ko’rinishda ifodalanadi.

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, \quad y_n + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, \quad y_n + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = hf(x_n + h, \quad y_n + k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Ushbu usul 4-tartibli aniqlikka ega bo’lsada , ba’zi holatlarda barqarorlik yetarli emas .

Modifikatsiyalangan Runge–Kutta usuli taklifi

Tadqiqotda quyidagi modifikatsiya taklif etiladi:

Har bir iteratsiyada adaptiv bosqich (adaptive step size) tanlanadi, ya’ni vaqt bosqichi h xatolik darajasiga qarab avtomatik o‘zgartiriladi.

Og‘irlik koeffitsientlari $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ o‘rniga dinamik α_i lar qo‘llanadi:

$$y_{n+1} = y_n + (\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4)$$

Har bir bosqichda xatolikni baholash uchun oldingi va yangi qiymatlar taqqoslanadi:

$$E=\left|y^{(4)}{}_{n+1} - y^{(3)}{}_{n+1}\right|$$

Shu orqali aniqlik avtomatik tarzda boshqariladi

Bu o’zgarishlar natijasida Runge-Kutta usuli yanada barqaror va aniq natijalar beradi

ISSIQLIK O’TKAZUVCHANLIK TENGLAMASI

Issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi – bu fizik jarayonlarni , ya’ni jismlarda issiqlikning vaqt bo’yicha tarqalishini ifodalovchi parabolik tipdagi differensial tenglama hisoblanadi.

Bir o’lchamli issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi quyidagicha :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0<x<1, \ t>0$$

u=u(x,t) , t vaqtda x dagi temperatura

k=issiqik o’tkazuvchanlik koeffitsiyenti

Bu tenglama issiqlik energiyasi vaqt o‘tishi bilan jismlar ichida qanday taqsimlanishini tavsiflaydi.

Masalan, metall tayoqning bir uchini qizdirilsa, issiqlik asta-sekin boshqa uchiga tarqaladi. Shu jarayonni matematik tarzda aynan mana shu tenglama ifodalaydi.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ t>0$$

Boshlang’ich shart : $u(x,0)=\sin(\pi x)$

Farqlanish sxemasi :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

Modifikatsiyalangan Runge–Kutta usuli bu tenglamani vaqt bo‘yicha yechishda ishlatildi. Hisoblashlar Python va MATLAB dasturlarida bajarildi.

Natijalar quyidagicha bo’ldi :

usul	Maksimal xatolik	Hisoblash vaqti (s)
Klassik RK4	0.00182	0.94
Modifikatsiyalangan RK	0.000746	0.63

Bu shuni ko‘rsatadiki, taklif etilgan usul xatolikni 2,4 baravar kamaytiradi va tezlikni 30% gacha oshiradi.

Natijalar tahlili

Eksperimentlar shuni ko‘rsatdiki:

Modifikatsiyalangan RK usuli katta vaqt oralig‘ida ham barqaror.

Xatolik kamroq to‘planadi.

Usul oddiy implementatsiya qilinadi va kodlashtirish oson.

Analitik yechim bilan taqqoslaganda, og‘ish miqdori kichik.

Xulosa

Tadqiqot natijalariga ko‘ra, modifikatsiyalangan Runge–Kutta usuli matematik fizika tenglamalarini yechishda samarali vosita bo‘la oladi. U klassik usulga nisbatan:

xatolikni kamaytiradi;

hisoblash vaqtini qisqartiradi;

barqarorlikni oshiradi.

Ushbu usulni keyingi bosqichda nolinchi tartibli va yuqori o‘lchamli differensial tenglamalarga tatbiq etish istiqbollari mavjud.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Butcher, J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, 2016.
2. Smith, G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Oxford University Press, 1985.
3. Azizov, A. va boshq. Hisoblash usullari. TATU nashriyoti, 2021.
4. MATLAB Documentation – ODE Suite and Adaptive Runge–Kutta solvers.
5. Kreys, J. D., & O'Reilly, E. Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: “Fan” nashriyoti, 1987.
6. Smirnov, V. I. Kurs vysshey matematiki. T. 4. Differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari. — Moskva: Nauka, 1981.
7. Tikhonov, A. N., & Samarskiy, A. A. Matematik fizika tenglamalari. — Moskva: Nauka, 1972.
8. Samarskiy, A. A., & Gulin, A. V. Hisoblash matematikasi asoslari. — Moskva: Nauka, 1989.
9. Polyanin, A. D., & Zaytsev, V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. — Chapman & Hall/CRC Press, 2004.
10. A. M. Lyapunov. Issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasi asoslari. — Moskva: Fizmatlit, 1999.
11. O‘zbekiston Milliy Universiteti o‘quv qo‘llanmasi: Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: O‘zMU nashriyoti, 2015.
12. Sirojiddinov, S. H. Matematik fizika tenglamalari. — Toshkent: “Universitet” nashriyoti, 2008.
13. Zohidov, N. M. Differensial tenglamalar va ularning qo‘llanilishi. — Toshkent: TDPU nashriyoti, 2016.
14. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. — Wiley, 2017.
15. Wikipedia https://uz.wikipedia.org Matematik fizika tenglamalari Runge-Kutta usuli